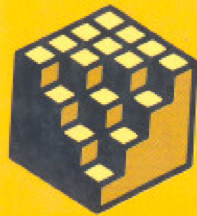
Enculturación matemática



La educación matemática desde una perspectiva cultural

Alan J. Bishop

Temas de educación
Paidós

Miguez 2007

SUMARIO

«En la primera parte del libro, Bishop desarrolla la idea de que las matemáticas, al igual que el lenguaje, son un fenómeno pancultural, distinguiendo entre este fenómeno pancultural y la forma particular de matemáticas que ha generado la disciplina internacional que en la actualidad se enseña en las escuelas y las universidades, bajo el nombre de matemáticas. Para facilitar esta distinción, a partir de la página 80 utiliza el término matemáticas, en minúscula, para referirse al primer caso, es decir, matemáticas en su forma genérica, y Matemáticas, en mayúscula, para referirse al segundo, la disciplina que se enseña en las escuelas y las universidades.»

AGRADECIMIENTOS

Este libro, como cualquier otro resultado del esfuerzo humano es, en esencia, un producto social. Aunque lo he escrito yo, muchas personas han contribuido a él de varias maneras.

En primer lugar debo expresar mi agradecimiento a tres educadores que han estimulado mi creciente interés en el aspecto cultural de la educación matemática. El primero es Adam Curle, a quien conocí cuando yo era un joven estudiante de posgrado en Harvard. El curso de Educación Comparativa de Adam me abrió los ojos y cambió por completo mi visión de la enseñanza. El segundo es John Reeves quien, mediante su trabajo para el British Council, me permitió realizar mis primeros escarceos en el terreno intercultural, primero en Irán y después en Uganda. El tercero es Glen Lean, quien me ofreció una experiencia de inmersión total en Papúa-Nueva Guinea y de la cual (me complace decir) nunca me he recuperado por completo. Sé que he aburrido muchas veces a colegas y amigos con mis relatos de «Cuando estaba en Papúa-Nueva Guinea...» y que algunos de mis críticos piensan que esta experiencia me ha nublado la visión.

Por esta razón, también debo expresar mi agradecimiento a todas las personas que han criticado mis ideas de vez en cuando. El equilibrio entre la simpatía del entorno académico y el desafío de la evaluación crítica es difícil de lograr, pero es crucial para que uno no acabe siendo un simple amigo más o un lobo solitario que aúlla en el desierto. Este equilibrio es uno de los éxitos que valoro en el grupo BACOMET, con cuyos miembros tengo otra gran deuda.

También están mis estudiantes, que a lo largo de muchos años han actuado, sin ser conscientes de ello, como una caja de resonancia para el desarrollo de mis ideas. Como todos los enseñantes de todas partes, estoy en deuda con ellos. He tenido la fortuna de enseñar a algunas personas excelentes y dos de ellas, Lloyd Dawe y Norma Presmeg, han sido especialmente estimulantes. Me complace ver que ninguna de ellas parece haber sufrido excesivamente durante la experiencia de trabajar conmigo.

Hay cuatro personas imposibles de categorizar y que han zarandeado mi pensamiento: Ken Clements, cuya franqueza australiana tan es saludable para mi cordura; Jeremy Kilpatrick, cuya conciencia cultural impide que me adentre demasiado en los márgenes de la vida académica; Heinrich Bauersfeld, cuya visión y capacidad de perspectiva siempre me hacen ver otras facetas; y Hans Freudenthal, cuya autoridad actúa como inspiración cuando escribir parece inútil.

Quisiera agradecer a Oxford University Press su autorización para citar la obra de Morris Kline *Mathematics in Western Culture,* a Cambridge University Press por autorizarme a reproducir un diagrama de la obra de B. Bolt *Mathematical Activities,* a D. Kerslake por permitirme citar *Language Teaching and Learning No. 6,* y a la Association of Teachers of Mathematics por permitirme citar la obra de D. Farnham *Language and Mathematical Understanding,* la obra de D. Lingard *Mathematical Investigations in the Classroom,* el artículo de G. Plummer «Responses to Snowflakes» (en *Mathematics Teaching* 116) y el artículo de J. Williams «Practical Applied Mathematics» (en *Mathematics Teaching* 116).

Por último, deseo expresar mi agradecimiento a Marie Collins, mi sufrida secretaria, porque sin ella ninguna de mis ideas sería legible, y también al personal de Kluwer, que sigue apoyando con tanta comprensión la publicación de la revista *Educational Studies in Mathematics* y esta colección de libros.

PREFACIO

La matemática se encuentra en una posición nada envidiable: es una de las materias escolares más importantes que los niños de hoy deben estudiar y, al mismo tiempo, es una de las peor comprendidas. Su reputación intimida. Todo el mundo sabe que es importante y que su estudio es necesario. Pero pocas personas se sienten cómodas con ella; hasta tal punto que en muchos países es totalmente aceptable, en el ámbito social, confesar la ignorancia que se tiene de ella, fanfarronear sobre la propia incapacidad para enfrentarse a ella, ¡e incluso afirmar que se le tiene fobia!

Entonces, ¿es que los profesores de todo el mundo son unos sádicos legitimados que torturan mentalmente a sus alumnos? ¿O quizá los alumnos son masoquistas y disfrutan con la emoción de la tortura autoinfligida? Hablando más en serio, ¿sabemos realmente en qué razones se basa la actividad matemática que se desarrolla en la escuela? ¿Realmente tenemos confianza en nuestros criterios para juzgar qué es importante y qué no? ¿De verdad sabemos qué deberíamos hacer?

Estas preguntas básicas son aún más importantes cuando las consideramos en el contexto de dos áreas cada vez más problemáticas. La primera es la preocupación sentida en muchos países por la dirección que debería tomar la educación matemática, en vista de la creciente presencia en la sociedad de la tecnología relacionada con calculadoras y ordenadores. La segunda se refiere a los niños cuya cultura familiar no sintoniza totalmente con la de la escuela y la sociedad en general, independientemente de que residan en Londres, en la Australia aborigen o en una reserva navajo.

Naturalmente, estas áreas problemáticas están relacionadas entre sí. La primera da pie a muchas consideraciones sobre los valores educativos, sobre la importancia que adjudica la sociedad a diferentes tipos de conocimiento y sobre la relación que mantienen los individuos con ese conocimiento. Y lo mismo ocurre con la segunda.

Éstas son las razones de que sintiera la necesidad de explorar la relación entre los desarrollos acaecidos en estas dos áreas problemáticas a través de su denominador común: la cultura.

Todo este libro trata de la matemática como «una manera de conocer». Aborda esta materia supuestamente familiar desde una perspectiva cultural y analiza las consecuencias educativas de esta perspectiva. En la primera mitad del libro exploro una gama de literatura antropológica, intercultural e histórica relacionada con las Matemáticas y la cultura. Mi propósito es crear una nueva concepción de las Matemáticas que reconozca y al mismo tiempo demuestre su relación con la cultura —la noción de matemáticas como producto cultural, las actividades sociales y relacionadas con el entorno que estimulan conceptos matemáticos, los valores culturales subyacentes a las matemáticas—, es decir, toda la génesis cultural de las ideas matemáticas.

Sin duda, esta amplia concepción debe tener muchas implicaciones para la educación matemática y, por tanto, en la segunda mitad del libro profundizaré en las más importantes, que se refieren al currículo de matemáticas, al proceso de enseñanza y a la preparación de los enseñantes. La noción de «enculturación matemática» es el constructo integrador presente a lo largo de todo el libro que origen a su título. La exploración de esta formulación me ha conducido a ciertos análisis inesperados que han tenido algunas consecuencias totalmente imprevistas. Espero que el lector disfrute compartiendo la historia de esta exploración tanto como disfrutó el autor al realizar la travesía.

Pero, hablando del lector, ¿en quién estaba yo pensando mientras escribía el libro? La respuesta breve sería: en cualquier otra persona interesada en las dos áreas problemáticas descritas anteriormente. La respuesta más larga es que este libro, más que requerir grandes conocimientos matemáticos especializados, requiere algún conocimiento de cuestiones educativas, buena predisposición para criticar la práctica tradicional y un gran interés en el proceso creativo de resolución de problemas aplicado *al* campo de la educación matemática. Que yo sepa, estos requisitos no excluyen a ningún grupo específico de personas.

ALAN J. BISHOP
Cambridge, primavera de 1988.

1 HACIA UNA MANERA DE CONOCER

1.1. El conflicto

Imaginemos la siguiente situación. Dos adolescentes modernos, que visten simplemente la ropa «adecuada», con su corte de pelo *à la mode,* discuten de automóviles con sus amigos. Están al día de los últimos modelos, conocen las sutiles diferencias en cuanto a fabricación, características del motor, capacidad de combustible y prestaciones, y aprecian el estilo, la forma y las dimensiones del interior. Están rodeados por artefactos y equipos de todo tipo. Su imaginación está llena de imágenes de productos y logros humanos: la era espacial, los medios de comunicación, los juegos de ordenador, el equipo estéreo portátil.

Al mismo tiempo, están preocupados. Las noticias están llenas de desastres y guerras. Oyen cosas sobre la industria armamentística internacional, la difícil situación de las personas que pasan hambre en las zonas más pobres del mundo, la explotación y la codicia de las multinacionales. Y no saben si tendrán un trabajo; de hecho, ni siquiera saben si quieren uno.

Están entusiasmados, inspirados, preocupados, frustrados y claramente confundidos.

La educación les debería ayudar y se supone que la educación matemática debería ayudarles en particular porque se dice que las matemáticas están en la raíz de la sociedad tecnológica moderna. Sin duda, los educadores, los padres y la sociedad en general consideran que las matemáticas son una de las materias más importantes del currículo escolar, estando solo por detrás del idioma nacional. Hoy en día, si alguien quiere tener éxito, debe estudiar matemáticas (y, hoy por hoy, también informática); ésta es la «creencia popular» de muchos padres en muchos países del mundo. En consecuencia, millones de niños de todo el mundo forcejean con las complejidades de cálculos, ecuaciones, triángulos y fracciones, mientras millones de enseñantes forcejean con las complejidades de inculcar la comprensión matemática en los jóvenes que tienen a su cargo.

Pero, ¿cuáles son los resultados de todo este esfuerzo? Sin duda, algunos niños tienen éxito; es decir, aprenden a emplear las técnicas matemáticas, obtienen las respuestas correctas, utilizan los métodos correctos y aprueban los exámenes. Muchos de ellos consiguen trabajos en la industria, la banca, el comercio, las multinacionales, el sector público y las fuerzas armadas. Algunos consiguen trabajo en la universidad aunque muy pocos de ellos llevan a cabo investigaciones matemáticas; otros llegan a ser enseñantes y algunos de ellos acaban enseñando matemáticas. La mayoría de los que «tienen éxito» nunca ponen en duda su conocimiento matemático o las matemáticas que han aprendido: después de todo, no hace ninguna falta si se tiene éxito. Como dice Keddie (1971) en los resultados de su investigación: «El hecho de que los alumnos capacitados no pongan en duda lo que se les enseña en la escuela contribuye en gran medida a su éxito educativo» (pág. 156).

Sin embargo, la situación es bastante diferente para la mayoría de los jóvenes que no tienen éxito. Siguen creyendo que las matemáticas son importantes, pero también que son difíciles —imposibles para muchos—, misteriosas, sin sentido y aburridas. No «tratan» de nada y provocan sentimientos de temor, de falta de confianza y, sin duda, de odio. Para algunos, llegan a provocar sentimientos de opresión y de estar bajo el dominio de alguien, no se sabe quién. No es probable que estas personas pongan en duda las matemáticas mismas, pero seguramente pondrán en duda, criticarán y vilipendiarán la llamada «educación matemática» que han recibido. Culpan a los enseñantes de no haberlos comprendido nunca, culpan al currículo de matemáticas por todos sus ejercicios irrelevantes y soporíferos y, naturalmente, culpan al sistema educativo por haberles engañado. El sistema les hizo creer que el estudio de las matemáticas era, y es, importante, y el sistema les ha fallado. El sistema creó la necesidad, pero ha sido incapaz de satisfacerla.

Éste es el conflicto que estimuló la redacción de este libro.

Por un lado, nos encontramos en un entorno tecnológico que cambia con rapidez, que depende cada vez más del conocimiento y la comprensión de las matemáticas, y que da satisfacciones a algunas personas pero es causa de preocupación para muchas otras. Tenemos un sistema social cada vez más complejo para manejar un entorno cuya complejidad también va en aumento, y tenemos que vivir en una sociedad centrada en la informática y familiarizada con la calculadora. Parece claro que la necesidad de una educación matemática sólida es más importante que nunca, aunque también está claro que estas necesidades cambian al ritmo de la tecnología.

Por otro lado, en un estudio tras otro no sólo vemos cuántos malentendidos matemáticos se producen como resultado de nuestra enseñanza, sino también lo limitada que es esta comprensión por «correcta» que sea. Constantemente sabemos de individuos que rechazan las matemáticas, las temen, les desagradan y que, si continúan estudiándolas (cosa que muchos no hacen), recurren a métodos instrumentales y de memorización para abordar las exigencias planteadas por los exámenes. Si la enseñanza de las matemáticas trata de ayudar a las personas a relacionarse mejor con su entorno, es evidente que fracasa en esta tarea.

Aunque este conflicto ya es muy grave tal como lo he descrito, en realidad es mucho peor. Lo que he descrito es lo que puedo ver y saber de la situación en un país de la Europa occidental donde las condiciones para la vida, el trabajo y la educación son razonablemente favorables. ¿Cuánto peor será en países donde la supervivencia es una meta más importante que vivir, donde el trabajo puede parecer un lujo soñado por muchos o donde la educación se considera una manera de escapar de una desesperada espiral de pobreza? ¿Qué posible importancia pueden tener las sutilezas de los modelos matemáticos, las rutinas de los algoritmos aritméticos y la pureza de las formas geométricas? ¿Y por qué los programas y los currículos de las sociedades más tecnológicas se deben considerar modelos apropiados para los de sociedades menos tecnológicas, especialmente cuando son inadecuados e incluso fracasan en su lugar de origen?

1.2. Mi tarea

Al escribir este libro pretendo profundizar en lo que, desde mi perspectiva, es una manera más adecuada de concebir la educación matemática en el contexto de una sociedad y un entorno tecnológico cada vez más complejos.

El enfoque que deseo explorar en este libro parte del hecho de que las matemáticas son un fenómeno cultural y mi exploración se inclinará hacia la vertiente antropológica. Deseo emplear esta idea para desarrollar un enfoque que, por su naturaleza, critique lo que en la actualidad pasa por educación matemática. Deseo generar ideas sobre el currículo de matemáticas, sobre el proceso de enseñanza real en las aulas y sobre la formación de enseñantes. Deseo descubrir qué grado de diferencia existe entre las situaciones como son ahora y como pueden llegar a ser, para que quede más claro cómo deberíamos empezar a modificar nuestro enfoque en la práctica. Mi búsqueda se dirige a encontrar nuevos principios que orienten nuestros próximos avances.

Creo que nos encontramos en una etapa crucial de la evolución de la educación matemática. Hemos dejado atrás la era de «la aritmética, el álgebra y la geometría». Ya hemos reconocido la importancia de enseñar las matemáticas como una materia integrada. Ahora nos dedicamos a tratar de enseñar las matemáticas a todas las personas. Sabemos que se puede hacer y tratamos de hacerlo de muchas maneras en todo el mundo. Pero creo que debemos desplazarnos conceptualmente desde la idea de «enseñar matemáticas a todo el mundo» hasta la idea de «una educación matemática para todo el mundo».[1]

1. Este cambio conceptual también se documenta en «Mathematics for all», de P. Damerow y otros (1984).

Educar matemáticamente a las personas es mucho más que enseñarles simplemente algo de matemáticas. Es mucho más difícil de hacer y los problemas y las cuestiones pertinentes constituyen un reto mucho mayor. Requiere una conciencia fundamental de los *valores* que subyacen a las matemáticas y un reconocimiento de la complejidad de enseñar estos valores a los niños. No basta simplemente con enseñarles matemáticas: también debemos educarles *acerca de* las matemáticas, *mediante* las matemáticas y *con* las matemáticas.

Enseñar a los niños a *hacer* matemáticas destaca el conocimiento como «una manera de hacer». En cambio, mi opinión es que una *educación* matemática se ocupa, esencialmente, de «una manera de conocer». Esto es lo que me impulsa a observar el conocimiento matemático desde una perspectiva cultural.

1.3. Pensamientos preliminares sobre educación Matemática y cultura[2]

Las relaciones entre educación y antropología no se han desarrollado demasiado aunque, como cabría esperar, cuando los antropólogos han estudiado culturas denominadas «primitivas», las ideas que han surgido han avivado debates sobre los problemas de la enseñanza formal en relación con esas culturas.

Sin embargo, es evidente que la idea de «cultura» ha sido un poderoso acicate para el pensamiento educativo en general y muchos escritores, filósofos y sociólogos han reconocido este poder. Como resultado, los matices y los «niveles» de cultura desarrollados como imágenes educativas han sido, y son, muchos. Su misma riqueza y su mismo poder podría acarrear su propia desaparición a causa de su empleo amplio y hasta excesivo: ¿se refiere la cultura a un pueblo? ¿O quizá a un patrimonio? ¿Quizá a un conjunto de valores? ¿Se refiere a la familia, la aldea, el país o la región? ¿Podría referirse al aula, la escuela o el sistema? ¿Y qué nos puede ofrecer aquí cualquiera de estas consideraciones? De hecho, se ha escrito un libro con el único objetivo de proporcionar «una revisión crítica de los conceptos y las definiciones» de la cultura (Kroeber y Kluckhohn, 1952) que ofrece muchas vías fértiles para explorar en el campo de la educación.

Quizá encontremos un punto de partida adecuado y global en la definición que nos ofrece Tylor (1871): «La cultura o civilización, tomada en un sentido etnográfico amplio, es esa totalidad compleja que incluye conocimientos, creencias, artes, moralidades, leyes, costumbres y cualesquiera otras capacidades y hábitos adquiridos por el hombre como miembro de la sociedad» (pág. 1). Sin embargo, el contexto de la educación formal significa que ciertos aspectos concretos de la cultura tendrán un interés mayor para este libro, y hay un autor que nos ofrece una útil introducción a estas cuestiones. Entwistle (1977) ha desarrollado un análisis de la cultura desde una perspectiva educativa y, ante todo, plantea una importante distinción entre los enfoques o conceptos «descriptivo» y «normativo» de la cultura. El primero de estos enfoques se contenta con describir y documentar, mientras que el segundo aplica un conjunto de valores a la totalidad así descrita. Por lo tanto, y especialmente para la consideración de cuestiones educativas, esto nos ofrece varias «versiones» de la cultura que vale la pena incluir en una iniciativa educativa. En la tabla 1 se muestra este esquema de análisis.

TABLA 1. CONCEPTOS DE CULTURA

Descriptivo		*Normativo*	
C1	Totalidad antropológica de actividades y artefactos («manera de vivir global»).	C1n	Totalidad (C1) menos sus elementos disfuncionales.
C2	El producto de la actividad intelectual y artística.	C2n	Lo *mejor* que se haya pensado y dicho.
C3	Artes (es decir, C2 menos filosofía, ciencia, historia).	C3n	El mejor arte («arte», música, pintura, escultura, etc.).
C4	Recreación (actividades de tiempo libre).	C4n	Actividades de esparcimiento «sanas».

Mientras que C1 incluye el modo de vida total de un pueblo, C2 es una concepción «que se refiere únicamente a la totalidad de artefactos que constituyen las artes, las ciencias y la filosofía». C3 es otra restricción mientras que C4 se podría considerar «cultura popular». Por su parte, C4n excluye aquellos aspectos de la cultura popular que tienen asociados unos valores «inadecuados» como, por ejemplo, ciertas drogas incluyendo el alcohol. Por lo tanto, las decisiones educativas se ocupan, en primer lugar, de determinar la gama y la variedad del estilo de vida total de una cultura que se debe transmitir a sus integrantes más jóvenes. Las restricciones que se impondrán a esa gama seguirán las dos dimensiones descritas por Entwistle. Para el problema que nos ocupa, es probable que estemos más interesados en los aspectos matemáticos de C2 y C2n, aunque sería

2. Quisiera mencionar aquí varios escritos que me fueron muy provocativos y útiles durante las primeras etapas de mi análisis. Más adelante opté por no mencionarlos específicamente en el texto para poder controlar mejor la dirección de este libro. Las referencias completas se encuentran en la bibliografía.
P.L. Berger y T. Luckman, *The social construction of reality.*
J.W. Berry, *Human ecology and cognitive style.*
D. Bloor, *Knowledge and Social Imagery.*
D. Bloor, *Mathematics: An Anthropological Phenomenon* (capítulo 5 de *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge).*
M. Cole y S. Scribner, *Culture and thought.*
H. Freudenthal, *Weeding and Sowing.*
P.M. Greenfield y J.S. Bruner, *Culture and Cognitive growth.*
F. Musgrove, *Education and Anthropology.*
B.L. Whorf, *Language, Thought and Reality.*
R. Wuthnow, *Cultural Analysis.*

conveniente un análisis de los valores más detallado que la simple idea de Entwistle, «lo *mejor* que se haya pensado y dicho». Evidentemente, la noción de un enfoque *selectivo* a la cultura es importante en la educación. La educación es una forma intencional y deliberada de transmisión cultural y, como tal, debe ser selectiva. Volveremos a tratar más adelante las decisiones sobre la elección de una «cultura» matemática para una educación matemática, especialmente en el capítulo 5.

El análisis de Entwistle también plantea la cuestión esencial de si una cultura se define como un conjunto de ideas o como un conjunto de personas con ciertas ideas. Es evidente que Entwistle se refiere más a la primera definición que a la segunda, pero otros autores, incluyendo Stenhouse (1967), vinculan las dos mucho más entre sí. Según Stenhouse: «La cultura consiste en un complejo de comprensiones compartidas que actúa como medio por el que las mentes individuales interaccionan para comunicarse entre sí» (pág. 16). Por lo tanto, en la medida en que unas personas compartan un «complejo de comprensiones», también pertenecerán al mismo grupo cultural. En la medida en que un «complejo de comprensiones» sea compartido por un grupo de personas, ese complejo se convertirá en «su cultura». Esta idea nos permite hablar de una cultura europea, de una cultura de la clase alta y de una cultura de la droga, y reconocer que una misma persona puede formar parte, o ser miembro, de estas tres culturas a la vez.

Entonces, ¿cómo se relaciona esta cuestión con el problema que planteo en este libro? Presentada como una simple dicotomía, la pregunta sería, ¿se centra mi interés en una «cultura de las matemáticas» o en un grupo cultural, quizá llamado «matemáticos»? El primer punto de vista está excelentemente ilustrado por el libro de Morris Kline *Mathematics in Western Culture,* donde plantea la tesis de que «las matemáticas han sido una fuerza cultural fundamental en la civilización occidental» (pág. 15). Su interés es claramente educativo y él también condena el hecho de que las escuelas hayan presentado «las matemáticas» como un conjunto de técnicas sin sentido. El objetivo de su libro es «examinar las matemáticas para mostrar cómo han contribuido sus ideas a moldear la vida y el pensamiento del siglo XX» (pág. 16). Presenta las matemáticas como un conjunto de ideas, como un «complejo de comprensiones», y espera que «se arroje una nueva luz sobre las matemáticas y sobre las características dominantes de nuestra era mediante esta explicación de las matemáticas como formadoras de la civilización moderna».

Por lo tanto, el trabajo de Kline está estrechamente relacionado con el mío y volveré a citarlo en otras ocasiones. Sin embargo, a él no le interesan específicamente los problemas de la enseñanza formal ni trata de formular propuestas para una educación matemática general. Si el libro de Kline trata, como él dice, de una «fuerza cultural fundamental en la civilización occidental», entonces deseo que *este* libro trate del tipo de educación matemática que permita que esta fuerza cultural sea reconocida, absorbida y también evaluada.

¿Y qué ocurre con la dicotomía ideas/personas? Naturalmente, Kline se refiere a las personas en su libro pero, en esencia, sólo como productoras individuales de ideas dentro de un contexto cultural y social. Sin embargo, Wilder, en su libro *Evolution of Mathematical Concepts* (1978), si bien aborda ostensiblemente la misma historia y el mismo desarrollo de las ideas matemáticas, también aborda directamente la dicotomía ideas/personas. Wilder plantea abiertamente su postura cultural con estas palabras: «Lo que aquí he tratado de hacer es estudiar la subcultura matemática más desde el punto de vista de un antropólogo que desde el punto de vista de un matemático» (pág. xiv) y también, podríamos añadir, desde el punto de vista de un historiador. Al principio de su libro, cuando examina varias ideas y cuestiones preliminares sobre la «cultura» de manera muy parecida a como lo hago yo ahora, deja muy clara su postura sobre «las personas» cuando dice que «las personas que hacen matemáticas —los «matemáticos»— no sólo son los poseedores del elemento cultural conocido como matemáticas sino que, cuando se toman como un grupo por derecho propio, se pueden considerar los portadores de una *cultura,* en este caso la matemática» (pág. 26). Por lo tanto, para Wilder, la cultura de ese complejo de comprensiones es la matemática y el grupo cultural es el de «los matemáticos». El interés de Wilder se centra en *cómo* evolucionan las ideas matemáticas y en quién «las hace evolucionar».

Sin embargo, a mí no me interesa específicamente *este* grupo cultural porque no ofrece ninguna base para contemplar una educación matemática general para todo el mundo. No obstante, tengo que encontrar maneras de incluir este grupo en el diseño porque es evidente que tiene una función importante en la cultura matemática y una buena educación matemática general no debería ser un obstáculo para su desarrollo. Las ideas de Wilder *son* importantes y volveremos a ellas más adelante.

Pero ni Wilder ni Kline se refieren al resto de nosotros, salvo como partes de «la civilización occidental» (Kline) o de «la cultura anfitriona» (Wilder). Los que no somos matemáticos (en el sentido de Wilder), ¿tenemos algún papel cultural que desempeñar? ¿Somos meros receptores de la evolución cultural de otras personas, o también formamos parte de esa evolución? Y, ¿cuáles son las implicaciones educativas de las respuestas a estas preguntas?

Normalmente, los antropólogos abordan este problema etiquetando en primer lugar el grupo cultural y describiendo después su cultura: así vemos, por ejemplo, libros sobre los indios navajo y sobre los esquimales. A veces, la definición de *las personas* que se estudian se toma en serio, pero con frecuencia no ocurre así y nunca podemos estar seguros, por ejemplo, de si la cultura que se describe está relacionada con todas las personas que tengan sangre navajo en las venas, o sólo con las personas totalmente navajo que viven en las reservas. Podemos ver inmediatamente el problema si intentamos aclarar *quiénes* son los europeos que poseen la cultura europea o, peor aún, quiénes son los «occidentales» que forman parte de la «cultura occidental» de Kline.

Pero yo no estoy interesado en los problemas de los antropólogos ni de los historiadores. Y de hecho tampoco me interesan especialmente los de los matemáticos, aunque es indudable que son bastante más interesantes. Lo que me interesa son los problemas de la educación matemática y tengo que encontrar maneras *educativamente* significativas de relacionar las personas y su cultura matemática. Concretamente, tengo que encontrar maneras de relacionar a los *niños* con su cultura matemática.

Quisiera empezar observando con una mirada crítica lo que sucede en la mayoría de las situaciones de enseñanza de las matemáticas de la actualidad. Naturalmente, es fácil adoptar una postura crítica y en un libro como éste es casi obligatorio hacerlo pronto para que el lector pueda empezar a ver el problema tal como lo ve el autor. Esta crítica también pondrá de manifiesto algunas cuestiones que, sin duda, tendré que abordar.

Desde mi perspectiva cultural, el estado actual de la enseñanza de las matemáticas presenta cuatro áreas principales de interés, que son: el currículo dirigido al desarrollo de técnicas, el aprendizaje impersonal, la enseñanza basada en textos y las suposiciones subyacentes a todas ellas.

1.4. El currículo dirigido al desarrollo de técnicas

La primera área importante que tiene interés para mí es el currículo de matemáticas que existe en la mayoría de los países del mundo y que está totalmente orientado hacia la ejecución de técnicas. El cálculo aritmético está muy arraigado como base del currículo de matemáticas y las «cuatro reglas» se van desarrollando gradualmente para abordar «números» cada vez más complicados: naturales, enteros, fraccionarios, decimales, complejos y, más adelante, matrices y vectores. El trabajo en álgebra desarrolla técnicas para resolver «ecuaciones» más y más complejas y para reordenar expresiones complicadas con el fin de poderlas «resolver». La geometría, si es que se llega a tomar en serio, se desarrolla como un área donde se pueden aplicar técnicas aritméticas y algebraicas, sea en la trigonometría o en la geometría analítica. Y para quienes hayan triunfado o sobrevivido a esta dieta, la puerta a nuevos placeres es el análisis matemático, con su miríada de ecuaciones diferenciales e integrales que esperan ser reconocidas, clasificadas y, por supuesto, «resueltas».

El currículo dirigido al desarrollo de técnicas está formado por procedimientos, métodos, aptitudes, reglas y algoritmos que dan una imagen de las matemáticas como una materia basada en el «hacer». Es decir, las matemáticas *no* se presentan como una materia de reflexión. No son una manera de conocer. Naturalmente, dentro de este currículo es necesario pensar, pero es un pensamiento limitado y constreñido, relacionado con la adopción del procedimiento adecuado, el empleo del método correcto de solución, el seguimiento de reglas y la obtención de la respuesta correcta. Por lo tanto, se trata de un currículo en el que «la práctica lleva a la perfección» mediante ejemplos que se deben emular y ejercicios que se deben llevar a cabo.

Pero mi caracterización —que quizá sea caricaturesca para algunas personas— no explica las razones de mi crítica. Probablemente, la mayoría de las personas reconocen esta caracterización y es probable que muchas la defiendan y reafirmen. Y es evidente que también se puede justificar en parte. Entonces, ¿por qué critico este currículo?

Lo que me preocupa es que, en esencia, se trata de un currículo «de usuario» que pretende desarrollar una «caja de herramientas» exhaustiva y variada para ese usuario. El objetivo es que el alumno sea capaz de emplear estas técnicas tanto dentro como fuera de las matemáticas. Desde el punto de vista de este currículo, «desarrollo» significa dominar un conjunto de técnicas cada vez más complejas y variadas. Conduce lógicamente a la noción de «dominio», que se va consolidando cada vez más como *el* criterio de evaluación en este currículo.

Pero la «ejecución de técnicas» es, precisamente, lo que pueden hacer las calculadoras y los ordenadores, que es lo que cabe esperar dado que no son más que versiones electrónicas de dispositivos mecánicos. Son manipuladores de técnicas por excelencia —éste es su punto fuerte— y, en consecuencia, una crítica sencilla del currículo basado en técnicas es que se limita a desarrollar en los seres humanos la capacidad para hacer lo que las calculadoras y los ordenadores pueden hacer con más rapidez y precisión de todos modos. ¡Lo irónico es que los ordenadores se desarrollaron para que pudieran realizar estas técnicas con una rapidez y una precisión que las personas nunca podrán igualar! Entonces, ¿por qué debemos *seguir* concentrando nuestro currículo en estas técnicas? Sin duda, lo que ahora se necesita es una comprensión mayor y una conciencia crítica de cómo y cuándo emplear estas técnicas matemáticas, por qué funcionan y cómo se han desarrollado. Esto no solo requiere pensar mucho más, sino también un pensamiento distinto; en consecuencia, también requiere enfocar el currículo de una manera muy diferente.

Sin embargo, en un nivel más fundamental, el currículo dirigido al desarrollo de técnicas parte de la *expectativa* de que el alumno se convierta en un usuario. Esto, dependiendo de las definiciones de cada cual, será cierto en un contexto de Matemática Pura y sólo para una proporción muy pequeña de la población. Sin duda, algunos acabarán trabajando en algo que utilice algunas técnicas matemáticas, pero, en general, y como nos muestran estudios como el de Fitzgerald (1981), cada trabajo específico suele requerir unas técnicas determinadas y bien establecidas. Los negocios, el comercio y la industria están demasiado controlados por la economía como para permitir que el empleado medio experimente con su «caja de herramientas». Por lo tanto, la idea de la persona común y corriente como un «solucionador de problemas» peripatético, dotado con una «caja de herramientas» de técnicas matemáticas y que busca problemas que hay que resolver, es un mito. Pero es un mito muy poderoso. Domina la enseñanza de las matemáticas en la actualidad, lo ha hecho durante mucho tiempo y probablemente continuará haciéndolo durante mucho tiempo más, a pesar de intentos como éste, destinados a desacreditarlo.

Una excusa empleada para perpetuar este mito es que una proporción pequeña de los alumnos de matemáticas que tienen éxito emplearán algunos métodos matemáticos en su trabajo. Pero, ¿por qué debe dominar este mito la educación del resto de la población? ¿Le ayudará a resolver mejor sus problemas «no matemáticos»? ¿Le ayudará a adoptar una postura crítica en relación con el desarrollo tecnológico?

Sin duda, desde mi punto de vista la respuesta es «no». Un currículo dirigido al desarrollo de técnicas no puede ayudar a comprender, no puede desarrollar significados, no puede capacitar al alumno para que adopte una postura crítica dentro o fuera de las matemáticas. *Por lo tanto, mi opinión es que un currículo dirigido al desarrollo de técnicas no puede educar.* Solo puede instruir y adiestrar, siempre y cuando tenga éxito, pero por mucho éxito que tenga en estos cometidos, por sí mismo no puede educar. Además, si fracasa en instruir y en adiestrar, entonces no hace *nada* positivo por el niño. Para el niño que tiene éxito es, como mucho, un adiestramiento; pero para el niño que fracasa es un desastre.

1.5. Aprendizaje impersonal

La segunda área que me interesa es la que denomino aprendizaje impersonal, caracterizada porque la tarea del alumno se concibe como si fuera independiente de su *persona*. Es decir, lo que se considera importante es que el alumno aprenda matemáticas, *no* que el alumno se esfuerce por obtener significados personales a través de la educación matemática. Con esto no pretendo criticar a los enseñantes, porque el sistema entero de la educación matemática perpetúa esta idea. Los planes de estudios, los exámenes, los libros, la formación de enseñantes y la investigación están dominados por el énfasis en el conocimiento de la materia y en la ejecución de técnicas.

Naturalmente, este apartado mantiene una fuerte conexión con el anterior. Un currículo dirigido al desarrollo de técnicas que busca respuestas correctas no ofrece ninguna oportunidad para la interpretación personal y la invención. Las reglas se deben aprender, los procedimientos se deben aceptar y las técnicas se deben practicar. Independientemente de la clase de persona que sea el alumno, el resultado matemático es el mismo. Al final, no importa si el alumno tiende más a la visualización o si prefiere analizar la lógica de la situación, porque $(a + b)(a - b)$ seguirá siendo igual a $a^2 - b^2$. No importa lo que el alumno pueda aportar a la situación, mientras obtenga siempre el mismo resultado. Éste es el mensaje recibido.

Por lo tanto, en una situación como ésta no hay ninguna necesidad de discutir, ninguna necesidad de «puntos de vista» u «opiniones» y, en consecuencia, no hay ninguna necesidad real de proporcionar oportunidades para el debate. Las preguntas del enseñante exigen unas respuestas determinadas (que el enseñante ya sabe), los problemas de los libros exigen ciertos tipos de solución (que ya aparecen en el texto). Dado este problema: «Cómo se mide la altura de un edificio empleando un barómetro», una respuesta como «bajar el barómetro hasta el fondo mediante un cordel y medir la longitud del cordel» no es aceptable. No sigue el «juego» según las «reglas». ¡Sin duda, alguien a quien se le hubiera enseñado «debidamente» debería conocer el tipo de respuesta que se considera aceptable![3]

Naturalmente, éste es el aspecto que realmente complace a muchos alumnos: «Con las matemáticas, se va sobre seguro». Las respuestas correctas y los procedimientos correctos tienen asociada una *seguridad* que atrae a muchos alumnos, sean niños o adultos. Además, éste es uno de los puntos fuertes de las matemáticas mismas; el teorema de Pitágoras es verdadero en todo el mundo. Una verdad matemática es independiente de cualquier factor geográfico y personal y (en teoría) puede ser verificada por cualquiera. ¡Ciencia!

Pero yo sostengo que aprender estas verdades matemáticas no constituye una educación matemática adecuada. El hecho de que las verdades matemáticas lo sean en todas partes y para cualquier persona, no es ninguna razón para decir que la *educación* matemática deba ser igual en todas partes y para todo el mundo. Por mucho que las verdades matemáticas sean universales, ello no significa que la enseñanza de las matemáticas deba ignorar la individualidad del alumno o el contexto social y cultural de la enseñanza. Una educación matemática debe hacer algo más que limitarse a *comunicar* estas verdades a los alumnos.

Naturalmente, en el aprendizaje de las matemáticas hay un aspecto «en el que hay acuerdo»: los significados compartidos que tenemos de las verdades matemáticas. Pero podría discutirse que en estos significados también existe una vertiente personal igualmente importante. El significado se refiere a las conexiones que establecemos entre ideas, y sólo algunas de estas conexiones serán las conexiones y los significados matemáticos acordados, compartidos u «oficiales». También habrá conexiones personales de imágenes y metáforas, de ejemplos del hogar o de otras experiencias, de sucesos significativos durante el aprendizaje de otras materias o de asociaciones con otras personas. Todos construimos por nuestra cuenta significados personales que dan importancia a nuestra vida.

El aprendizaje impersonal de las matemáticas ignora totalmente estas conexiones y significados personales y, en consecuencia, despersonaliza el proceso de aprendizaje. La «ausencia de significados personales» significa que, en realidad, en las aulas donde se imparten matemáticas no hay ninguna «persona»: sólo hay un enseñante de matemáticas y varios alumnos. Por lo tanto, la tarea de ese enseñante es comunicar «las matemáticas» con la mayor eficacia y eficiencia posibles para que los alumnos puedan aprender «las matemáticas». «Las matemáticas» son un objeto impersonal que se debe transmitir mediante una comunicación unidireccional. Los significados y los puntos de vista personales del enseñante son irrelevantes y no hacen más que «estorbar», mientras se supone que todos los alumnos deben aprender exactamente lo mismo; existen no como personas sino como

3. Este problema, con su variedad de «respuestas», se cita en Schminke y Arnold (1971).

un «alumno» generalizado. Rara vez se les permite ser personas y expresar sus sentimientos, sus intuiciones, sus significados y sus interpretaciones personales.

Sin duda, el aprendizaje impersonal es, en esencia, antieducativo.

1.6. La enseñanza basada en textos

La tercera área de interés se desprende de la anterior: el aprendizaje impersonal conduce a la enseñanza impersonal, que he caracterizado como «enseñanza basada en textos». Muchas clases de matemáticas de todo el mundo son testimonio de la subordinación de la enseñanza basada en el enseñante a la enseñanza basada en textos y, de hecho, son muy raros los enseñantes que rechazan estos textos. En algunos sistemas educativos existe un libro de texto cuyo empleo es obligatorio. Ese libro es «la biblia»: sacraliza las matemáticas escolares. En otros sistemas, los enseñantes pueden escoger entre un conjunto de libros recomendados y en otros sistemas aún más abiertos el enseñante tiene libertad para explotar los recursos que crea convenientes. Pero la mayoría de los sistemas educativos del mundo esperan que los enseñantes utilicen algún libro.

Pero, ¿de quién son estos libros? ¿Quién los escribe, para quién y por qué? ¿Conocen los autores a los alumnos que los usarán o a los enseñantes que se basarán en ellos para enseñar? ¿Aceptarán los autores ser responsables de los niños que no puedan aprender? ¿Aceptarán los autores el mérito si los alumnos tienen éxito? El hecho de que los libros de texto ejercen un control es bien sabido (por eso muchos sistemas del mundo se basan en un solo libro). El hecho de que controla tanto al enseñante como a los alumnos también es bien sabido por quienquiera que haya enseñado con un libro de texto o que haya aprendido con él. Entonces, ¿dónde reside la responsabilidad que debe acompañar a este control? Naturalmente, se suele considerar que esta responsabilidad recae en el enseñante. Pero si la enseñanza está siendo controlada por el libro de texto, ¿debe recaer esta responsabilidad en el enseñante?

Si la responsabilidad tiene que recaer en *los enseñantes*, como creo que debe ser, entonces no deben estar controlados, al mismo tiempo, por el libro. Deben tener la ayuda y el apoyo de materiales y actividades sobre los que ellos tengan control para que puedan ayudar a sus alumnos a tener éxito, porque sólo los enseñantes pueden conocer a los alumnos y sólo ellos pueden juzgar si comprenden bien o no.

Por lo tanto, el control ejercido por el libro de texto impide en realidad que los enseñantes conozcan a sus alumnos y, en consecuencia, les impide ayudarles con eficacia. Como los libros de texto «a prueba de enseñantes» se idearon para que los utilizaran enseñantes inexpertos, podemos imaginar en qué medida un libro de texto detallado y cuidadosamente planificado puede «descapacitar» a un enseñante y acabar siendo menos efectivo a corto plazo y totalmente contraproducente para los enseñantes a largo plazo.

En el otro extremo encontramos que a algunos niños se les enseña matemáticas de una manera aún más impersonal: utilizan lo que se denomina «materiales individualizados». Los diseñadores de estos materiales no pueden presuponer nada acerca del enseñante y, de hecho, ni siquiera pueden presuponer que haya un enseñante. Por lo menos, el autor de un libro de texto puede redactar un manual para el enseñante que lo acompañe. Pero, según se dice, lo «bueno» de los materiales individualizados es que no necesitamos la presencia de un enseñante real. En la actualidad, algunos de estos materiales están apareciendo en pantallas de microordenadores —material individualizado electrónico— y constituyen el «no va más» tecnológico de la enseñanza basada en textos. Esta enseñanza puede ser individualizada, pero nunca podrá ser personalizada. La única persona que quizá puede personalizar la enseñanza es el enseñante, siempre y cuando se le dé una oportunidad. Pero cuanto más intervenga el texto —o la máquina— menos oportunidades tendrá el enseñante de personalizar su enseñanza.

Por lo tanto, deberíamos tener sistemas que no estén basados en libros de texto y formar a los enseñantes para que no dependan de ellos. Debemos dejar que el enseñante controle los materiales, no al revés, y demostrar que la responsabilidad de la enseñanza recae en el enseñante y no en el texto.[4]

Lo que de verdad necesita un enseñante no es un texto, sino actividades y recursos que contribuyan al desarrollo de los alumnos. Lo que de verdad necesita el alumno no es un texto, sino un entorno de aprendizaje apasionante, cálido, comprensivo e intelectualmente estimulante. Ninguna de las partes del proceso pedagógico necesita textos. Entonces, ¿por qué los textos tienen que ser tan dominantes?

1.7. Suposiciones falsas

Naturalmente, el hecho de que tengamos currículos dirigidos al desarrollo de técnicas, un aprendizaje impersonal y una enseñanza basada en textos no es casual. Todas estas características han evolucionado para satisfacer ciertas condiciones existentes en su día y todas se basan en determinadas suposiciones. Su preponderancia en la práctica educativa —las podemos encontrar en cualquier país del mundo— se debe a estas suposiciones. Pero ahora estas suposiciones se deben poner en duda y, dentro del contexto de una educación matemática, creo que todas ellas son falsas.

En esencia, el currículo dirigido al desarrollo de técnicas parte de la suposición de que un método «de arriba a abajo» es óptimo para enseñar las matemáticas. Esto significa que planificamos el currículo escolar en función de la necesidad de

4. Los controles ejercidos por los libros de texto están bien descritos por Hardy (1976) en su artículo «Textbooks and classroom knowledge: the politics of explanation and description».

producir matemáticos de primera y, en última instancia, investigadores en el campo de las matemáticas. Todos los demás alumnos abandonan en niveles diferentes, cuando las matemáticas ya son demasiado difíciles, carecen de sentido o son irrelevantes en el plano personal. Por lo tanto, se trata de un enfoque que, además de no tener la educación como objetivo, provoca «abandonos». Naturalmente, es necesario dar cabida a diferentes intereses y aptitudes dentro del sistema educativo, pero un currículo general basado en las necesidades de un experto no es educativo.

¿Cómo se puede revelar la cultura matemática a los niños sin que ésta se vea como un conocimiento «de arriba a abajo»?

Como dije antes, el aprendizaje impersonal se basa en la suposición de que el carácter universal de las matemáticas implica la universalidad de su enseñanza. También está muy relacionado con el método «de arriba a abajo»: en primer lugar, porque no establece ninguna distinción entre lo que aportan a la clase los distintos alumnos y en segundo lugar, porque transmite la idea de que el conocimiento matemático es pasado hacia abajo «desde las altas esferas». En este sentido, presupone que como el acervo de conocimientos matemáticos es esencialmente un conocimiento deshumanizado, este rasgo también debe caracterizar la educación matemática. No es que el *enseñante* no reconozca la humanidad y los intereses personales de los alumnos como individuos: la *educación matemática* es la que no los reconoce.

¿Cómo pueden conservar los alumnos su individualidad en un enfoque «cultural»?

La enseñanza basada en textos también se basa en el enfoque «de arriba a abajo» a la educación matemática porque, de hecho, el libro de texto personifica y objetiva el currículo «de arriba a abajo». Pero esto también presenta otra faceta. El currículo «de arriba a abajo» está diseñado para desarrollar expertos en matemáticas y, de igual modo, los mismos textos son el producto de expertos (no necesariamente los mismos, naturalmente, aunque esto haya sucedido y continúe ocurriendo). De todos modos, estos textos los elaboran personas que creen saber mejor que los enseñantes qué es lo mejor para los alumnos. Los redactores de estos textos suelen presuponer con arrogancia que su nivel de competencia es más elevado que el de los enseñantes (y, naturalmente, más que el de los alumnos): esto coloca necesariamente a los enseñantes en una posición subordinada y, en última instancia, desestima sus aptitudes y su profesionalidad.

¿Cómo se pueden poner materiales a disposición de los enseñantes sin que se les otorgue la condición de «expertos»?

La otra suposición en la que se basa la enseñanza basada en textos está relacionada con la impersonalidad: se demuestra que el trabajo del enseñante es enseñar matemáticas, no enseñar a personas. Un libro de texto, con sus progresiones y secuencias cuidadosamente elaboradas, hace suposiciones acerca de un alumno «generalizado» que, como dije anteriormente, no es una persona real. Por lo tanto, un enseñante limitado por el texto no puede enseñar a las personas y sólo puede tratar de enseñar matemáticas. Además, las matemáticas que se enseñan se presentan como si estuviesen libres de valores. Como están deshumanizadas, despersonalizadas y (naturalmente) descontextualizadas, se ha creído necesario eliminar toda referencia a valores y a otros aspectos relacionados con la cultura para que, supuestamente, las matemáticas conserven su «pureza».

Las matemáticas como cultura, ¿qué tienen que ver con las personas?

Un corolario de esta suposición es que la enseñanza de las matemáticas se debe «sistematizar». Esta suposición se deriva de las organizaciones comerciales e industriales, siendo el enseñante la versión educativa de «El Hombre Organización». Por lo tanto, podemos encontrar fuertes sentimientos de jerarquía (expertos/enseñantes), mecanismos de organización (currículos planificados, libros de texto controlados, materiales prescritos, pruebas secuenciadas) y un criterio absoluto de «eficiencia». En este contexto, el enseñante no es más que un simple «sistema de entrega» educativo que, de hecho, ¡es totalmente ineficiente![5] Esta suposición da mucha importancia a la eficiencia en la gestión y la organización, y menosprecia las cualidades personales, la iniciativa individual y la capacidad de los enseñantes. Además, ignora el hecho de que la educación es en esencia un proceso interpersonal y, en consecuencia, intenta despersonalizar y deshumanizar. Cuanto más se afane el «sistema» en pos de la eficiencia, más tratará de controlar y, en última instancia, menos educará.

Lejos de ser una filosofía *educativa*, el supuesto de la «sistematización» hace que nos centremos en *la producción*, es decir, en tratar de lograr «productos» hechos con eficiencia, con el control de calidad como salvaguardia y con el libro de texto como pieza clave del mecanismo del sistema. Pero, dicho todo esto, ¿cómo puede una sociedad organizar una educación matemática para sus niños sin caer en la trampa del «sistema»?

1.8. La educación matemática como proceso social

A estas alturas ya debería estar claro que, para mí, se debe reconocer que la educación es esencialmente un proceso social y que, en consecuencia, una educación matemática también debe contener en su núcleo la suposición de que es un proceso social. Esta afirmación parece trivial pero, como acabo de decir, la naturaleza social, humana y esencialmente inter*personal* de la educación se suele ignorar por las prisas en adquirir técnicas matemáticas y por el deseo de lograr una educación matemática «eficiente».

Por lo tanto, si consideramos los aspectos sociales de la educación matemática, nos encontraremos con cinco niveles importantes:

5. Este punto de vista se presenta con la mayor claridad en Merill y Wood (1974).

Cultural
Societal*
Institucional
Pedagógico
Individual

El grupo social más amplio es el grupo cultural y las matemáticas como fenómeno cultural tienen una naturaleza claramente suprasocial. Las matemáticas se utilizan en todas las sociedades y son la única materia que se enseña en la mayoría de las escuelas del mundo; además, el rápido crecimiento de la comunidad internacional dedicada a la educación matemática es un ejemplo de la condición suprasocial de esta materia.

En el nivel *societal*, las matemáticas están mediatizadas por las diversas instituciones de la sociedad y están sometidas a las fuerzas políticas e ideológicas de esa sociedad. Como ya dije antes, aunque las matemáticas son un fenómeno internacional y cultural, no existe necesariamente ninguna razón por la cual la *educación* matemática deba ser igual en todas las sociedades. Ésta era la tesis explorada por Swetz (1978) en su libro *Socialist Mathematics Education*. Swetz examinó la educación matemática de acuerdo con la imagen que de ella tenían unos observadores procedentes de siete sociedades socialistas (URSS, República Democrática de Alemania, República Popular de China, Yugoslavia, Suecia, Hungría y Tanzania). Los estudios interculturales mencionados en el próximo capítulo también muestran, por ejemplo, que la enseñanza de las matemáticas en una sociedad predominantemente agrícola podría ser notablemente diferente de la de una sociedad muy tecnológica. Por lo tanto, en el nivel societal, podemos ver que unas sociedades diferentes emplean sus distintas instituciones educativas formales e informales para dar forma a la enseñanza de las matemáticas en función de sus aspiraciones y sus metas sociales.

En el siguiente nivel educativo podemos considerar las influencias *intrainstitucionales* que determinan aún más la educación matemática de los niños. Cada institución trabaja en el currículo intencional y lo implementa en función de los puntos fuertes, los puntos débiles, las limitaciones y los recursos de su personal. La estructura interna y la «política» de la institución son un factor importante, igual que el lugar que ocupan las matemáticas en el currículo escolar, que suele ser alto. Los mecanismos para agrupar alumnos, para examinarlos, para asignar material a las materias y para enseñar estas materias, también tienen unos efectos profundos en la «imagen» de las matemáticas que tienen enseñantes y alumnos. Una vez más, aunque la materia llamada «matemáticas» puede tener la misma etiqueta en escuelas distintas, no existe ninguna razón necesaria por la que las matemáticas escolares deban ser las mismas en una escuela de una sociedad y en una escuela de otra. Naturalmente, habrá similitudes como en el libro de Swetz, pero también habrá diferencias. Un curso de Álgebra 1 en un instituto estadounidense será muy distinto de las matemáticas integradas que se enseñan en Inglaterra a los niños de trece años de edad, y las dos serán diferentes de las matemáticas que se enseñan a los niños de 13 años en un centro belga de segunda enseñanza.

* El autor en el original introduce el neologismo «societal» para referirse a aspectos sociales de grupo como distinto al término «social» referido a la sociedad en sentido amplio. En la traducción se mantiene la distinción del autor. *(N. del t.)*

En el nivel *pedagógico*, las influencias sociales en la educación matemática del niño se pueden identificar mucho más fácilmente con personas concretas y conocidas: el enseñante y los restantes alumnos del grupo. Dentro de las limitaciones establecidas por la sociedad y por la institución, el enseñante y el grupo moldean, en su interacción, los valores que recibirá cada niño en relación con las matemáticas. Mediante actividades, y con refuerzo y negociación, el niño sigue un proceso de enculturación en el que adquiere maneras de pensar, de comportarse, de sentir y de valorar. Se podría decir que quienes participan en la clase son *los* formadores más importantes de valores, aunque nunca debemos perder de vista las limitaciones establecidas por la sociedad, las influencias intrainstitucionales y, naturalmente, los valores culturales que conllevan las matemáticas mismas. Una «clase de matemáticas» ya está definida de manera que sólo sean posibles unas actividades determinadas; en consecuencia, sólo se desarrollan ciertos tipos de valores.

Puede que parezca extraño, o por lo menos innecesario, tener un «nivel» social llamado *individual*, pero considero muy importante reconocer que, cuando contemplamos la educación matemática como un proceso social, el individuo negocia, integra y comprende los diferentes mensajes relacionados con valores. El niño no llega a la escuela como un recipiente vacío y tampoco deja de aportar algo a la empresa educativa.

Cada niño, como alumno y creador de significados, aporta una dimensión personal a esta empresa en función de su familia, su historia y su «cultura» local. No hay dos alumnos que sean iguales; en consecuencia, aunque los mensajes que se transmitan acerca de valores se puedan considerar «iguales», el mensaje recibido será diferente porque los receptores son diferentes. Como el receptor aporta el contexto conceptual que da significado al mensaje, toda comunicación está influida por la personalidad del individuo.

Más aún, el individuo aporta valores al proceso educativo y, como forma parte del grupo de la clase, contribuye a influir en el proceso de dar forma al nivel pedagógico. El niño incorpora continuamente influencias ajenas a la institución y a la educación formal en el proceso formal de educación, influyendo así en este proceso. El niño no es un simple receptor de educación o una mera esponja que absorbe valores: el niño desempeña un papel fundamental en la dinámica social de la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto, un niño que forma parte de un grupo en una clase determinada, con un enseñante concreto, en una escuela particular y en una sociedad dada, participa en una experiencia educativa muy particular. Y si la materia en cuestión son las matemáticas, el niño participa en una experiencia educativa matemática muy particular.

No obstante, esta experiencia también es una experiencia *matemática* y, en consecuencia, tiene una base cultural. Las matemáticas no son el producto de una sola sociedad y las matemáticas escolares *no* son una materia «societal» como pueden serlo la educación cívica, la historia o incluso el lenguaje. Como las matemáticas son un fenómeno cultural, trascienden los límites sociales de la misma manera que la música, la religión, la ciencia, el arte o el deporte. La «soledad del corredor de fondo» que compite en una maratón olímpica de hoy es una experiencia tan cultural como la emoción provocada por un oratorio de Händel o la belleza expresada por los trazos aparentemente simples de un pincel japonés. Los valores reales pueden ser muy diferentes, pero las raíces suprasociales de estos valores son claras. El placer y la satisfacción producidos por la demostración pitagórica o por el método sumativo de Gauss no son un mero fenómeno social. Tampoco lo es la sorpresa de descubrir una pauta, ni la sólida previsibilidad de un algoritmo comprobado. Cuando hablamos del poder del método matemático, no vemos este poder como si estuviera dentro de unos límites societales estrechos: imaginamos que es visible en cualquier lugar.

1.9. ¿Qué tiene de matemática una educacion matemática?

Esta pregunta puede parecer bastante extraña hasta que nos acordamos de la cuestión planteada anteriormente acerca de la *elección* de la cultura matemática. Quizá esta pregunta se debería reducir a «¿Cómo debería ser la base matemática de una educación matemática»? Es evidente que no podemos incluir todo lo matemático, o ni siquiera todo lo matemáticamente simple, para los alumnos de corta edad. Entonces, ¿cómo deberíamos elegir? y, más importante aún para este capítulo introductorio, ¿qué tipo de marco conceptual nos ofrece una buena base estructural para elegir?

En primer lugar, no solo rechazaré la idea de «la totalidad de las matemáticas» sino también la idea de un marco «cronológico». Aunque es evidente que libros como los de Kline o Wilder tienen valor, la *cronología* de la cultura matemática no tiene por qué ofrecer necesariamente el «andamiaje» ideológico para la educación matemática en un lugar y en una época dados. Lo que hace falta es un esquema que relacione la enseñanza de las matemáticas con su entorno societal, y las matemáticas como fenómeno cultural nos ofrecen una manera de hacerlo.

White (1959) nos ofrece un punto de partida prometedor en su libro *The Evolution of Culture*, donde argumenta, como hacen otros autores, que «las funciones de la cultura son, por un lado, relacionar al hombre con su entorno y, por otro, relacionar al hombre con el hombre» (pág. 8). Sin embargo, White va más allá y agrupa los componentes de la cultura en cuatro categorías:

Ideológica:	se compone de creencias, depende de símbolos, filosofías.
Sociológica:	costumbres, instituciones, normas y pautas de comportamiento interpersonal.
Sentimental:	actitudes, sentimientos relacionados con personas, comportamiento.
Tecnológica:	fabricación y empleo de instrumentos y utensilios.

Además de mostrar que estos cuatro componentes están relacionados entre sí, White argumenta convincentemente que «el factor tecnológico es el básico; todos los demás dependen de él. Además, el factor tecnológico determina, por lo menos de una manera general, la forma y el contenido de los factores social, filosófico y sentimental» (pág. 19).

Este punto de vista está apoyado por un argumento de Washburn (1960) y otros, basado en pruebas arqueológicas recientes, según el cual el hombre *llegó a ser* hombre mediante el empleo y el desarrollo de instrumentos y utensilios. En palabras de Washburn: «... según el punto de vista predominante, el hombre evolucionó casi hasta su estado estructural actual y después descubrió los instrumentos y los nuevos modos de vida basados en ellos. Ahora parece que los homínidos... ya habían aprendido a fabricar y utilizar instrumentos. De esto se sigue que la estructura del hombre moderno debe ser el resultado del cambio, desde el punto de vista de la selección natural, que se produjo con el estilo de vida basado en el empleo de instrumentos» (pág. 11).

El hecho de que las instituciones sociales de un pueblo descritas por White dependen de su tecnología es evidente desde las épocas más remotas. Por ejemplo, los procesos de caza, pesca, cultivo o pastoreo y todos los procesos de producción alimentaria, fueron y son algo más que simples procesos tecnológicos: también son procesos sociales. Las tecnologías de la era industrial crearon muchas instituciones sociales, forjaron muchos procesos sociales y desarrollaron muchas de las costumbres sociales que siguen con nosotros hoy en día.

Algo similar ocurre con los factores ideológico y filosófico. La tecnología de una cultura está estrechamente relacionada con su ideología y los cambios en la tecnología crearán cambios en la filosofía de la cultura. «La agricultura a gran escala como empresa capitalista, que hoy es posible gracias a la maquinaria y los tractores, conlleva una filosofía totalmente diferente, como modo de vida, del cultivo con mulas o bueyes de 1850» (pág. 23).

La influencia de la tecnología en el factor sentimental es menos evidente según White, quien considera que esto se debe al hecho de que «en una explicación de los sistemas culturales, los mismos sentimientos son menos importantes que las instituciones sociales y los sistemas de creencias» (pág. 24). No obstante, White muestra una vez más que los cambios en la tecnología pueden influir en los sentimientos y propone que consideramos desde esta perspectiva cosas como «las actitudes hacia la castidad, la eutanasia, la esclavitud, el divorcio, la industria, la frugalidad o el derroche, reglas específicas para la guerra y miles de ejemplos más» (pág. 26). En el capítulo 3 veremos que las ideas de White acerca del «sentimiento» tienen mucho valor.

Aunque Stenhouse prefiere no centrarse por completo en lo que él denomina «cultura material» y se inclina por centrarse en «ideas, pensamientos y sentimientos», apoya la postura general de White diciendo que: «Por lo tanto, la cultura se debe adaptar a las demandas del entorno material y mantenerse en contacto con las ideas conservadas del pasado» (pág. 18). Así pues, es evidente que la *tecnología* de una cultura o fenómeno cultural de White, es un puente importante hacia el «entorno material» y que deberíamos explorar esta idea más a fondo.

Naturalmente, la idea de tecnología cultural no se debe limitar a la maquinaria o a utensilios como hachas, palas o cuerdas. Algunos autores, como Bruner (1964), han argumentado que el hombre ha evolucionado «vinculándose con sistemas instrumentales nuevos y externos y no mediante cambios morfológicos manifiestos» (pág. 1). Según Bruner, hay tres tipos de sistemas instrumentales:

— Amplificadores de las capacidades motrices.
— Amplificadores de la capacidad sensorial.
— Amplificadores de la capacidad de razonamiento.

El desarrollo humano crucial en la tercera categoría está relacionado con los símbolos. Los seres humanos difieren de los animales por su capacidad y su deseo de crear símbolos y sistemas de símbolos. Aunque el sistema de símbolos más importante y que precedió a los demás fue el habla, aquí tiene más importancia para nosotros el lenguaje escrito y, naturalmente, la simbolización matemática. La matemática es un ejemplo por excelencia de «amplificador de la capacidad de razonamiento del ser humano» y, como fenómeno cultural, tiene un importante componente «tecnológico», empleando la terminología de White. *La matemática es, en esencia una «tecnología simbólica».*

Bruner habla de ello como sigue: «Por instrumento amplificador se entiende una característica tecnológica, sea «blanda» o «dura» (en el lenguaje de la informática), que permite al individuo controlar recursos, prestigio y deferencia dentro de la cultura. Un ejemplo de amplificador cultural para las clases medias que potencia los procesos de pensamiento de quienes lo emplean es la disciplina que se conoce, en términos generales, como «matemática». El empleo de técnicas matemáticas requiere el cultivo de unas aptitudes determinadas para el razonamiento e incluso ciertos estilos de desplegar los propios procesos de pensamiento. Si cultivamos estrategias y estilos pertinentes al empleo de las matemáticas, tendremos a nuestra disposición la correspondiente gama de tecnologías. Si no cultivamos aptitudes matemáticas, el resultado es una «incompetencia funcional» y la incapacidad de emplear este tipo de técnica» (Cole y Bruner, 1971, pág. 872). Sin embargo, el esquema de White también nos ofrece la oportunidad de explorar la ideología, el sentimiento y la sociología impulsados por esta tecnología simbólica. Por lo tanto, me serviré de este esquema en el capítulo 3 para centrarme en los *valores* inherentes a una educación *matemática*.

1.10. Perspectiva general

En el próximo capítulo propongo explorar con mayor detalle el componente tecnológico de lo que he denominado *cultura matemática,* teniendo siempre presente que, para mí, esta frase es una manera abreviada de decir «perspectiva cultural de las matemáticas» o «las matemáticas como fenómeno cultural». Con esto *no* quiero decir que toda la cultura sea matemática ni que lo deba ser. Quizá el lector prefiera concebirla como la subcultura matemática o el componente matemático de nuestra cultura. Cualquiera de las dos me satisface, siempre y cuando *no* coincidan con el punto de vista elitista de Wilder de «la subcultura de los "matemáticos"», ni con la cultura de las «clases medias» a las que Bruner y Cole se refieren indirectamente.

Este análisis ofrece dos resultados que dan que pensar. El primero es que las matemáticas son un fenómeno pancultural: es decir, existen en todas las culturas. El segundo resultado es que las matemáticas que se presentan en la obra de Kline *Mathematics in Western Culture* son una variante particular de la matemática desarrollada a través de los tiempos por diversas sociedades. A esta matemática la llamo en todo el libro «Matemática» con «M» mayúscula.

En el capítulo 3 examinaré los componentes no tecnológicos de la cultura Matemática, lo que nos sugerirá algunas ideas acerca de los *valores* que comporta una educación Matemática: los componentes ideológicos, sentimentales y sociológicos de nuestra cultura Matemática.

En el capítulo 4 empezaré a analizar con más detalle la educación Matemática desde la perspectiva cultural. Este capítulo lo he titulado «La Cultura Matemática y el niño» porque en él desarrollo la noción de que la llamada «Enculturación Matemática» es a la vez un «objeto» y un «proceso». En consecuencia, en el capítulo 5 se aborda la «objetivación» —concretamente, el currículo Matemático— mientras que el capítulo 6 se centra en el proceso de enculturación tal como se puede —y se debería— dar en el aula.

En el último capítulo, la atención se desplaza necesariamente hacia los responsables de todo el proceso de enculturación Matemática a quienes llamo «Enculturadores Matemáticos». Este grupo, además de incluir a los enseñantes, también incluye a los formadores de enseñantes y a otras personas implicadas, y el capítulo se centra en la formación de enseñantes necesaria para hacer que la Enculturación Matemática llegue a ser una realidad.

2 ACTIVIDADES RELACIONADAS CON EL ENTORNO, Y CULTURA MATEMÁTICA

2.1. Perspectivas ofrecidas por los estudios crosculturales

En 1967 se publicó un libro que dio origen a muchas investigaciones y desarrollos. *The New Mathematics and an Old Culture* (Gay y Cole, 1967) comunicaba una investigación llevada a cabo en Liberia por un equipo de investigadores estadounidenses que estaban intrigados por las dificultades experimentadas por los niños kpelle para abordar los conceptos y los procesos exigidos por las «nuevas matemáticas» en sus escuelas «occidentalizadas». Esta motivación inicial desembocó en el intento de tratar de comprender mejor la matemática indígena de los kpelle y, con este fin, los autores idearon muchos experimentos y llevaron a cabo muchas entrevistas para averiguar el empleo que hacían los kpelle de las clasificaciones, los números, las operaciones, la geometría, las medidas, el lenguaje espacial y la lógica.

La lectura de este libro es fascinante y muestra convincentemente las razones de que los niños kpelle encontraran tan difícil abordar las matemáticas «occidentales». Entre las afirmaciones que indican los tipos de problemas a los que se enfrentan los kpelle, se encuentran las siguientes:

- El potencial lingüístico para la clasificación no garantiza que este proceso se dé (pág. 39).
- Hay pocas ocasiones para contar más allá de 30 o 40, aproximadamente (pág. 42).
- Toda la actividad aritmética está vinculada con situaciones concretas (pág. 50).
- Los kpelle solo nombran las formas geométricas de uso común en su cultura (pág. 61).
- En general, las unidades de medida no forman parte de un sistema interrelacionado sino que son específicas de los objetos medidos (pág. 75).

— Los kpelle tienen en su idioma una expresión negativa, varias expresiones conjuntivas, expresiones disyuntivas (inclusivas y excluyentes) y varias expresiones para la implicación. Pueden expresar equivalencias sólo de una manera complicada (pág. 83).

Esta lista plantea un sinfín de interrogantes fascinantes, especialmente para un enseñante de matemáticas experto que disfrute con el desafío de un problema pedagógico o dos: ¿cómo podríamos crear experiencias de aprendizaje significativas para contar más allá de 40? ¿Cómo podemos hacer que un niño kpelle se «desplace» desde la particularidad de las medidas empleadas a un sistema más generalizado? ¿Cuál es la mejor manera de desarrollar el lenguaje especializado necesario para trabajar con equivalencias?, y así sucesivamente.

En este nivel, todas las preguntas se refieren a técnicas de enseñanza, es decir, todas giran en torno a preguntas del tipo «¿Cómo...?» y «¿Cuál...?»: dado un «problema» de aprendizaje, ¿cuál es la mejor manera de resolverlo? En cierto sentido, se trata de preguntas técnicas basadas en la suposición de que es necesario e importante resolver estos problemas. Pero en el nivel de la cultura, vale la pena poner en duda esta suposición por sí misma, al igual que ocurre con otras suposiciones que se refieren tanto a la «postura» de los investigadores hacia sus sujetos como a las peculiaridades de las tradiciones culturales de los propios investigadores.

Como ya se dijo al comienzo de este capítulo, este libro estimuló una gran cantidad de investigaciones y desarrollos. Hemos visto estudios de una naturaleza similar llevados a cabo con otros pueblos y culturas, como en Papúa-Nueva Guinea (Lancy, 1983 y Lean, 1986), con aborígenes australianos (Harris, 1980) y con los amerindios, los pueblos indígenas del continente americano (véanse, por ejemplo, Closs, 1986 y Pinxten, 1983). Ahora disponemos de varios estudios sobre aspectos geométricos específicos, sobre números y sobre el crecimiento y las complejidades del lenguaje; además, la conciencia creciente del valor de los datos antropológicos y de los muchos estudios comparativos y crosculturales ha desarrollado una abundante información croscultural. Es evidente que gran parte de esta investigación analítica está provocada por la curiosidad y por una fascinación genuina por los contrastes; por ejemplo, ¿qué enseñante de matemáticas no se sentiría intrigado por la tarea de recopilar información acerca de más de 500 métodos de contar distintos en Papúa-Nueva Guinea, como hizo Lean (1986)? ¿Por dónde empezar? ¿Qué presupondríamos? ¿Quizá primero deberíamos preguntarnos cuántos métodos distintos de contar conocemos nosotros mismos?

Sin embargo, de estudios como éstos podemos empezar a aprender otras cosas y quizá algo más general: a partir de estos contrastes podemos aprender acerca de las matemáticas como fenómeno cultural. Como argumenta George Kelly (1955), crecemos cognitivamente manejando contrastes. Los contrastes no sólo nos proporcionan diferencias: también nos hacen reconocer similitudes porque dos fenómenos deben tener alguna similitud para que sus diferencias se puedan reconocer.

Por lo tanto, lo que a mí me interesa de estudios culturales como éstos es lo que nos dicen sobre las similitudes entre grupos culturales, desde el punto de vista de las ideas y las actividades matemáticas. Nos dicen algo del fenómeno cultural llamado «matemáticas» y nos permiten comprender mejor las raíces del pensamiento matemático.

Por ejemplo, a primera vista un estudio como el de Gay y Cole parece ofrecer más información sobre las diferencias que sobre las similitudes. *Parece* que en la cultura kpelle el pensamiento matemático es casi inexistente y que los kpelle viven en una sociedad que parece ser relativamente insensible a las ideas matemáticas. Los mismos Gay y Cole venían de EE.UU. —una cultura que está muy influida por el pensamiento matemático— y, en consecuencia, en su libro encontramos repercusiones de su cultura. El lenguaje empleado en el libro también es el de una cultura que se ve a sí misma como dominante: por ejemplo, las construcciones como *not* («no»), *few* («poco[s]»), *tried to* («se intentó»), *only* («solamente») de las citas anteriores tienen una connotación negativa. Sin duda, se trata de un libro escrito por extranjeros procedentes de una cultura que se ve a sí misma como superior a la cultura kpelle en algún sentido.

No obstante, mediante una investigación cuidadosa y pasando por alto la superioridad implícita en la postura de los investigadores, no sólo podemos encontrar información sobre lo que los kpelle no pueden hacer, sino también sobre lo que *sí pueden* hacer. Podemos empezar a aprender los *puntos fuertes* de la cultura kpelle. Si hacemos esto con todos los estudios de este tipo, podremos empezar a controlar el culturocentrismo que padecemos cuando contemplamos otras culturas. De hecho, podemos empezar a ver similitudes matemáticas entre «nosotros» y «ellos». Podemos empezar a admitir la posibilidad de que *todas* las culturas participan en actividades matemáticas.

2.2. La búsqueda de similitudes matemáticas

Mi primer borrador de este capítulo abarcaba lo que entonces consideraba que eran las cuatro áreas principales de las matemáticas: número, medida, geometría y lenguaje/lógica. Pronto me di cuenta, y mis críticos así lo confirmaron, de que debería haber incluido más aspectos, pero el problema era cómo describirlos y etiquetarlos. Además, resultó que basarme en «temas» como éstos no era la mejor manera de abordar las similitudes que yo buscaba. Imaginemos, a modo de ejemplo llevado hasta el ridículo, que hubiéramos elegido explorar la diseminación de una idea como «ecuaciones lineales simultáneas». De hecho, esta idea ha aparecido en dos o tres grupos culturales, pero es evidente que no es universal y que no cabe esperar que lo sea necesariamente. También es dependiente de muchas otras ideas y es producto de un tipo determinado de desarrollo algebraico. Por lo tanto, este tema no sólo es una primera aproximación inadecuada para encontrar un candidato para el análisis croscultural: tampoco sirve para mostrar por qué un enfoque basado en el examen de *temas* es inadecuado. Las ideas matemáticas son, en esencia, *productos* de diversos procesos y podríamos plantear la hipótesis de que el carácter de estos productos es muy posible que difiera de una cultura a otra.

Por ejemplo, ahora está bien establecido que todos los grupos humanos se comunican y que todas las culturas desarrollan un lenguaje. Pero en el mundo existen muchos tipos de lenguaje diferentes, de los cuales algunos se pueden escribir y algunos no. Sin duda, los lenguajes escritos se encuentran más avanzados en el camino de la evolución que los lenguajes hablados, pero podemos comprender claramente que el lenguaje es un producto desarrollado a partir de la necesidad y la actividad de comunicación. También disponemos de revistas sólidamente implantadas como *Anthropological Linguistics*. Pero este nivel de conocimientos no ha existido siempre: se han necesitado años de laboriosa investigación para establecerlo.

Por lo tanto, me siento impelido a plantear una pregunta paralela: «¿Desarrollan matemáticas todas las culturas?»; en consecuencia, mi búsqueda debe orientarse a las actividades y los procesos que conducen el desarrollo de las matemáticas. En pocas palabras, ¿cuáles son las actividades matemáticas equivalentes a la «comunicación», que dio lugar al desarrollo del lenguaje?[1]

En este capítulo he optado por presentar seis actividades para su estudio. No creo que este número en particular sea importante, pero lo que más me interesaba al hacer la elección era la manera en que conceptualizaban y definían el campo de estudio. Las dos candidatas más evidentes eran *contar* y *medir*. Las dos se ocupan de ideas relacionadas con el número, aunque se trata de ideas bastante diferentes. El aspecto discreto de contar es su característica esencial y contrasta notablemente con la continuidad de los fenómenos a los que imponemos sistemas de medición. No sólo el concepto es distinto: todo el contexto societal para el desarrollo de estos dos conjuntos de ideas parecía ser significativamente diferente y, en consecuencia, era conveniente separarlos.

La estructuración espacial también ha sido muy importante en el desarrollo de ideas matemáticas y de nuevo he optado por separar dos tipos muy diferentes de estructuración que dan origen a tipos distintos de ideas geométricas. Llamo a estas actividades *localizar*, que destaca los aspectos topográficos y cartográficos del entorno, y *diseñar*, que trata de las conceptualizaciones de objetos y artefactos y conduce a la idea fundamental de «forma».

Sin embargo, dado que la cultura no se limita a vincularnos con nuestro entorno físico, como nos recuerda White, necesitamos definir algunas actividades más orientadas a que nos relacionemos unos con otros, vinculándonos como individuos con nuestro entorno social. Las dos actividades que presentaré como

1. Naturalmente, reconozco el carácter circular de esta situación, pero aun así creo que es sensato retener la idea de la matemática como *producto* cultural: es decir, como un tipo de conocimiento simbolizado resultante de determinadas actividades.

matemáticamente muy importantes para este fin son *jugar* y *explicar*. Jugar se refiere a las reglas y los procedimientos sociales para la actuación y también estimula el aspecto «como si» de la conducta imaginada e hipotética. *Explicar* es la última actividad que hay que describir y su función es indicar los diversos aspectos cognitivos de investigar y conceptualizar el entorno y de compartir estas conceptualizaciones.

Todas estas actividades están motivadas por necesidades relacionadas con el entorno y, al mismo tiempo, ayudan a motivar estas necesidades. Todas ellas estimulan diversos procesos cognitivos y son estimuladas por éstos, y argumentaré que todas son importantes, tanto por separado como en interacción, para el desarrollo de ideas matemáticas en cualquier cultura. Además, todas implican unos tipos especiales de lenguaje y de representación. Todas ayudan a desarrollar la *tecnología simbólica* que llamamos «matemáticas».

Examinemos ahora cada una de estas actividades con detalle, primero para comprobar el supuesto de que representan una similitud entre culturas, después para ver con qué otras ideas se relacionan y, por último, para explorar las diferencias que se producen cuando el entorno cambia. En particular, deberemos analizar los efectos de actuar en lo que ahora es un entorno cada vez más complejo y más orientado a la tecnología.

2.3. Contar

Empezaremos con la actividad que quizá sea la que más sugiere un desarrollo matemático y que probablemente es la actividad matemática mejor investigada en la literatura cultural. Sin duda, contar y asociar objetos con números tiene una historia muy larga y muy bien documentada. El libro de Menninger (1969) es el recurso clásico y proporciona un análisis básico.

Sin embargo, los estudios antropológicos y culturales más recientes nos hacen tomar conciencia de algunos aspectos diferenciales particulares que tienen importancia para la enseñanza de las matemáticas en todos los países.

En primer lugar, la gama de sistemas de contar existentes ha sido *y sigue siendo* enorme y está bien ejemplificada por el estudio de Zaslavsky (1973), donde se muestran tanto las similitudes como las diferencias entre los sistemas de contar de África. Por ejemplo, a pesar de que la palabra «uno» se describe de manera muy diferente en los más de mil lenguajes de África, los nombres para dos, tres y cuatro muestran un notable grado de concordancia en medio continente. «Dos suele ser una forma de *li* o *di*. La palabra para tres contiene la sílaba *ta* o *sa* y "cuatro" es generalmente una consonante nasal, como *ne*. Para "cinco" existen varios términos aunque, con frecuencia, es la palabra que designa la mano» (pág. 39). Al parecer, algunos lingüistas han especulado que estas similitudes tienen su origen en la dispersión de los pueblos de habla bantú por todo el continente.

Zaslavsky también hace referencia a bases distintas para los sistemas de contar, a contar con gestos y dedos y, además, en una sección sobre números y dinero, demuestra que cuando existe la necesidad social y ambiental, los pueblos denominados «primitivos» pueden desarrollar maneras de describir números muy grandes. Distintas fuentes comunicaron a esta autora el empleo de conchas de cauri para desarrollar sistemas capaces de representar 24.000, 64.000 y, en un sistema (el pueblo igpo), hasta 96.000.000. Una vez más, vemos que se desarrolla una tecnología simbólica en respuesta a unas necesidades percibidas, de la misma manera que ocurre con la tecnología «de objetos».

Otros estudios nos muestran que el contar se produce incluso en situaciones sociales donde no existe ninguna necesidad de números muy grandes. Por ejemplo, la investigación de Harris (1980) sobre la matemática de los aborígenes australianos muestra que la caricatura «uno, dos, muchos» del sistema de contar primitivo, tan celebrada por los culturocentristas de salón es, como todas las caricaturas, una exageración y sólo una pequeña parte de la verdad. Mientras que «casi todos los lenguajes australianos sólo contienen dos o tres números cardinales» (pág. 13) es evidente que se emplea mucho el método de contar con el cuerpo —una extensión, o quizá un precursor, de contar con los dedos—, donde los nombres de los números son sinónimos de los nombres de las partes del cuerpo que se señalan. Harris cita un ejemplo de Howitt, escrito en 1903: «Mediante la anterior manera de contar, son capaces de llegar hasta treinta, con nombres para cada lugar» (pág. 698).

Menninger argumenta que estos últimos sistemas de contar representan una etapa en el desarrollo histórico del número y que otras sociedades han progresado más allá de esta etapa primitiva. Esta afirmación puede ser correcta desde un análisis histórico, pero cuando se observa desde un punto de vista croscultural se tiene la sensación de que va desencaminada. Según Harris: «Donde la matemática occidental, siguiendo la visión del mundo de la Europa occidental, insiste en realizar muchos cálculos con números grandes, los aborígenes australianos siempre se han ocupado de números pequeños y de individuos» (pág. 14). Necesariamente, se podría añadir, y es indudable que este interés se refleja en una «riqueza» del lenguaje para los números pequeños. La autora cita el trabajo de Stokes acerca de uno de los lenguajes australianos, el anindilyakwa, mostrando que en contraste con la distinción relativamente primitiva que se hace en inglés entre singular y plural, los anindilyakwa emplean cuatro categorías:

Singular — uno
Dual — dos
Trial — tres
Plural — cuatro o más

Además, «sujeto, verbo y complemento repiten los detalles del número» (Stokes, 1976, pág. 3). Este nivel de detalle se complementa en otros lenguajes australianos mediante construcciones ricas para describir relaciones intrafamiliares, de nuevo en contraste con los términos ingleses relativamente primitivos (por ejemplo, cuando el hermano de una madre y el hermano de un padre tiene el mismo nombre, «tío»). Este mismo fenómeno del «número gramatical» también está presente en virtualmente todos los lenguajes de Papúa-Nueva Guinea (Lean, comunicación personal).

Otro aspecto de interés es que algunos juegos de cartas practicados por los aborígenes australianos (por ejemplo, el kuns) requieren un conocimiento sofisticado de combinaciones numéricas. Por lo tanto, parece que cuando en el entorno hay menos necesidad de números grandes o incluso del «infinito», puede haber un empleo mayor de números finitos pequeños y se puede pensar en números con un estilo «combinatorio». Como afirma Denny (1986) cuando habla de los inuit y los ojibway, dos pueblos predominantemente cazadores: «En el caso de contar, la enumeración es una manera de captar objetos que no se pueden identificar perceptiva o conceptualmente. Estas condiciones rara vez se plantean a los cazadores porque su entorno relativamente invariable, y la pequeña cantidad de artefactos hechos por el hombre, normalmente permitirán percibir y conceptualizar las cosas como objetos individuales. Por lo tanto, las ocasiones para contar son pocas y la mayoría de las veces se limitan a números pequeños» (págs. 178-179).

Uno de los estudios más exhaustivos de los sistemas de contar se llevó a cabo en Papúa-Nueva Guinea y fue comunicado en primer lugar en Lancy (1978) y también en Lancy (1983). Basándose en los diversos recursos de las dos universidades allí existentes, Lancy pudo analizar 225 sistemas de contar que fueron agrupados en los cuatro tipos siguientes:

- Tipo I: sistemas basados en contar partes del cuerpo, con el número de partes variando de 12 a 68.
- Tipo II: sistemas que emplean piezas como, por ejemplo, varillas. La base numérica suele estar entre 2 y 5.
- Tipo III: bases mixtas de 5 y 20 que emplean nombres de números compuestos como «dos manos y un pie» para denotar 15.
- Tipo IV: sistemas de base 10 con varios nombres discretos para los números en vez de nombres compuestos.

Este trabajo está siendo continuado por Glen Lean en la University of Technology, y el número de sistemas de contar que ha documentado hasta ahora pasan de 500.[2]

Es indudable que estudios como éstos nos convencen, si es que hace falta convencernos, de que no hay simplemente dos sistemas numéricos —el «civilizado» y el «primitivo»—como solía establecer la creencia convencional, sino una rica variedad de sistemas que varían en función de la necesidad relacionada con el

2. Véase Lean, G.A., *Counting Systems of Papua New Guinea* en las referencias. Según Lean, la tipología de sistemas de contar original de Lancy ya no es adecuada para clasificar.

entorno, tanto físico como social. Por ejemplo, Lancy cita casos en los que las mismas personas emplean sistemas de tipo IV y II en circunstancias diferentes; naturalmente, esto también ocurre en otras culturas. En inglés, por ejemplo, podemos encontrar combinaciones de ideas con muchos «cuantificadores» como «cada», «algunos», «todos», «ninguno», «muchos» o «pocos», referidas a sucesos. Aún podemos encontrar «palabras numéricas» especializadas, la mayoría de ellas para dos, como «par», «pareja», «gemelos», «dúo», etc., y entonces podemos empezar a comprender las diferentes etapas de desarrollo de contar, de emplear «palabras numéricas» como cuantificadores, como ocurre, por ejemplo, con «gemelos», que sin duda es una expresión más especializada que «dos niños nacidos del mismo parto». Las dos formas preceden al empleo de «dos» como sustantivo o, de hecho, como un objeto de interés en sí mismo. Todos estamos muy familiarizados con la práctica de emplear toda clase de «sistemas» numéricos en nuestra vida diaria.

El trabajo clásico de Menninger *Number Words and Number Symbols* apoya nuestro pensamiento en este campo, ofreciéndonos una gran abundancia de datos y análisis que no nos dejan ninguna duda acerca de la universalidad de contar y de las ideas de número. Ahora disponemos de datos de todos los continentes y, de la misma manera que podemos apreciar la universalidad de la «comunicación» y del «lenguaje», también podemos apreciar la universalidad de «contar» y de los «números». También podemos ver que con el crecimiento del tamaño de los números en la comunidad y con la complejidad creciente de las sociedades, han ido surgiendo sistemas numéricos más y más complejos. Sin duda, no es por accidente que los aborígenes nómadas han desarrollado un sistema para manejar sus números pequeños de una manera sutil y que, por ejemplo, el desarrollo de una sociedad grande como la china necesitara un gran desarrollo de los métodos de anotación y cálculo (véase, por ejemplo, Ronan, 1981). Naturalmente, también podemos comprender el desarrollo del registro estadístico desde este mismo punto de vista.

Además, a medida que el desarrollo de sistemas de números ha ido creciendo, los métodos de simbolizar y documentar números han tenido que ser cada vez más sofisticados. Los números se anotan de muchas maneras diferentes en distintas sociedades como, por ejemplo, mediante muescas, trazos de tiza, jeroglíficos, quemaduras en madera, ábacos, cuentas y, quizá el método más intrigante de todos, haciendo nudos en cordeles. El mejor ejemplo de este último método de simbolización es el *quipu,* un sistema de nudos usado por los incas y bien documentado por los Ascher (1981). Los incas no tenían ningún sistema de lenguaje escrito, pero en una sociedad tan desarrollada como la suya había una clara necesidad de contar y anotar de una manera cuidadosa y sistemática. El *quipu* era el método empleado y el libro de los Ascher transmite muy bien la sofisticación de este método.[3]

3. Quizá convenga decir aquí que el lector hará bien en prepararse mentalmente para aceptar la «cuerda» como el medio universal para la matemática: ¡aparecerá en la mayoría de los apartados de este capítulo!

Otro aspecto de interés destacado por Lancy (1938) se centra en la necesidad de precisión. Según Lancy: «Nuestros estudios etnográficos indican que existe alguna variación que depende de los participantes y de las situaciones en el empleo de contar. Al parecer, ninguno de los sistemas de contar de Papúa-Nueva Guinea tiene la clase de características rígidas que nuestra mente asocia al número y al contar» (pág. 103). Como el contar está relacionado tan estrechamente con el comercio, la riqueza, el empleo, la propiedad y el nivel en una sociedad, también está muy relacionado con los valores sociales del grupo, y la precisión forma parte de esa relación. Recuerdo a un alumno que escribió $0,7 \times 0,7 = 4,9$ y que, cuando se le enseñó la respuesta correcta de 0,49, comentó: «Es casi correcto». Seguramente lo es, ¡pero en nuestra cultura «avanzada» no interesa el «casi» salvo en situaciones muy particulares y definidas con precisión *(sic)*! Abordaremos esta cuestión con más detalle en un apartado posterior dedicado a «medir».

Gay y Cole llaman nuestra atención sobre otro aspecto —concretamente, qué *se puede* contar en la cultura kpelle— sensibilizándonos acerca de sus tabúes relacionados con el número y con los atributos mágicos o misteriosos otorgados a determinados números. Para los kpelle no es seguro contar determinadas cosas: por ejemplo, «no es apropiado contar pollos u otros animales domésticos en voz alta, porque se cree que ello les acarreará algún mal» (pág. 41). Zaslavsky (1973) confirma la preocupación extendida por todo África acerca de los peligros de contar. También insinúa un desarrollo simbólico muy interesante: los tabúes no son simplemente ideas raras o exóticas y bien pueden haber contribuido al desarrollo real del empleo de números provocando el desarrollo de maneras *indirectas* de contar. Si no nos está permitido contar objetos o personas directamente, entonces podemos emplear palos o guijarros para *representar* los objetos y contarlos.[4]

Naturalmente, podemos tender a considerar que algunas de estas ideas sobre tabúes son un poco graciosas, hasta que nos acordamos de las supersticiones que tienen muchas personas de las sociedades llamadas «modernas» acerca de los números trece o siete. ¡También conocemos los posibles «peligros» derivados de las exigencias de los funcionarios de nuestros gobiernos que desean saber exactamente cuánto ganamos en un año o lo grande que es nuestra casa! En potencia, la información numérica es una información muy poderosa y aunque «formalmente» no podamos tener ningún temor a contar ni tabúes reales acerca de los números, aún pueden ser fuente de alguna inquietud. Depende de las instituciones sociales y de la importancia del número en nuestras sociedades. La numerología y la fascinación mística por los números han sido aspectos importantes de muchas sociedades y, dados los vínculos que mantienen con la astrología, la religión, la predicción y las creencias, quizá nos ayuden a comprender mejor el poder explicativo de las matemáticas mediante los números. No deberíamos tratar

4. Naturalmente, los «cálculos» eran las cuentas de piedra, vidrio o metal que los romanos utilizaban en las tablas de contar.

ideas como estas a la ligera si tratamos de comprender las matemáticas como producto cultural.[5]

En resumen, desde esta perspectiva cultural vemos que la actividad de contar —que quizá considerábamos importante aunque relativamente sencilla— implica muchos aspectos, con sutiles variaciones en los tipos de lenguaje y las formas de representación empleados para comunicar los productos de contar. Es una actividad firmemente relacionada con las necesidades vinculadas con el entorno y está sujeta a diversas presiones sociales. Está estimulada por los procesos cognitivos de clasificar y buscar pautas y, al mismo tiempo, influye en estas actividades; además, es evidente que ofrece muchas ideas para nuestra búsqueda de «universales» culturales de las matemáticas.

2.4. Localizar

He elegido colocar esta actividad a continuación, no para satisfacer algún principio «matemático» de orden sino porque, al principio de la búsqueda de universales, parecía necesario demostrar la importancia del entorno espacial para el desarrollo de las ideas matemáticas. Incluso podría ocurrir que los retos planteados por la exploración de tierra y mar, por la necesidad de «conocer» bien el propio terreno y por la necesidad de buscar alimento sean tan básicos que se podría justificar perfectamente colocar esta actividad antes de la de contar. Sean cuales sean nuestros sentimientos al respecto, la universalidad de esta actividad es indudable.

Como cabía esperar, todas las sociedades han desarrollado métodos más o menos sofisticados para codificar y simbolizar su entorno espacial. En particular, sociedades diferentes en lugares geográficos muy distintos dan importancia a aspectos diferentes. Por ejemplo, en algunos lenguajes de las tierras altas de Papúa-Nueva Guinea, caracterizadas por una orografía muy escarpada, existen palabras para denotar distintos grados de pendiente o inclinación, pero no existe una manera fácil de describir la idea de «horizontal». Naturalmente, los pueblos de las islas no tienen esta dificultad.

Es sorprendente que, en los estudios culturales de las ideas matemáticas, localizar haya recibido relativamente menos atención que contar y que, en consecuencia, esté mucho menos documentada. No obstante, podemos encontrar datos importantes e interesantes, no sólo para corroborar la afirmación de «universalidad» sino también para indicar la importancia de la localización para el desarrollo *matemático*. Naturalmente, aunque esta vez las ideas se relacionan principalmente con nociones geométricas, en el apartado dedicado a «diseñar» veremos que esta actividad sólo nos proporciona algunas de las nociones geométricas que existen en todas las culturas. Nos proporciona los tipos de ideas que Freudenthal (1984) caracteriza como «topográficas».

5. Por ejemplo, véase en Kozminsky, 1985, una introducción a diversas ideas numerológicas.

Un estudio que examina con detalle la manera de conceptualizar el espacio de una cultura determinada y que nos ofrece una base para este apartado, es el trabajo de Pinxten con los pueblos navajo de Norteamérica (Pinxten, van Dooren y Harvey, 1983). Este estudio exhaustivo intenta exponer la filosofía y la fenomenología del espacio de los navajo y nos ofrece algunas nociones fascinantes.

Pinxten emplea este estudio para ilustrar un «instrumento analítico» que él mismo ha desarrollado para estudiar las nociones espaciales en contextos culturales diferentes y que se conoce por las siglas UFOR (*Universal Frame of Reference*, marco de referencia universal). El UFOR es un diccionario de nociones espaciales y proporciona una lista de comprobación a partir de la cual se pueden explicar los conceptos espaciales de cualquier cultura haciendo referencia a tres «niveles» de espacio:

— Espacio físico o espacio de objetos.
— Espacio sociogeográfico.
— Espacio cosmológico.

El segundo de estos niveles parece ser el más pertinente para nuestro análisis actual y en la lista que sigue podemos ver lo importante que es el mundo espacial desde la perspectiva de las ideas matemáticas, no sólo por las nociones geométricas evidentes, sino también por las nociones de dirección, orden, finitud, etc., que están estrechamente relacionadas con nuestras imágenes de los números y de contar.

202 Cercano, separado, contiguo
203 Parte/todo
204 Lindar con, delimitar
205 Superponer
206 Interno/externo; central/periférico
207 Abierto/cerrado
208 Converger/diverger
209 Con volumen plano
211 Anterior/posterior (enfrente de, detrás de)
213 Profundo, lejano (dimensión de profundidad)
214 Distante (métrica)
215 Sobre/bajo; encima/debajo
216 Vertical, perpendicular (dimensión)
217 Alto/profundo (métrico)
218 Lateral; al lado de
219 Izquierdo/derecho
220 Horizontal (dimensión)
221 Amplio, ancho (métrica)
222 Puntos cardinales, direcciones cardinales
223 Sistemas de coordenadas
224 Extensión multidimensional (métrica)
225 Nociones geométricas
226 Geométricamente lineal, recto
227 Geométricamente convergente, paralelo, formar ángulo
228 Geoso: superficie, volumen en el espacio sociogeográfico
229 Mapa, escala
230 Reposo; movimiento
231 Estar en un camino; orientarse
232 Navegar
233 Tener una dirección de movimiento
240 Características globales del espacio sociogeográfico
241 Absoluto/relativo
242 Finito/infinito
243 Limitado/ilimitado
244 Continuo/discontinuo
245 Homogéneo/heterogéneo

(Las categorías de los otros dos niveles espaciales del UFOR se parecen a éstas.)

Pinxten argumenta la universalidad de los referentes espaciales como sigue: «Todas las culturas tienen sus maneras específicas de representar el mundo. Sin embargo, todas ellas se refieren al mismo sol, la misma luna o la misma tierra "que están ahí" y todas lo hacen mediante los mismos "instrumentos" básicos para obtener conocimiento y comprensión, es decir, manipulando la materia con las manos, mirando el mundo a través de unos ojos idénticos, moviéndose alrededor de un cuerpo uniformemente estructurado de una manera idéntica (por ejemplo, caminando hacia adelante y hacia atrás, girando en un plano horizontal), etc.» (pág. 45). Una vez establecidas estas similitudes, Pinxten identifica para nosotros algunas diferencias importantes entre lo que él llama espacio «occidental» y espacio navajo:

1. Aunque en el espacio navajo *existen* nociones básicas (él las denomina movimiento, con volumen/plano, dimensiones) la manera en que se organizan las ideas espaciales no parece ser jerárquica, como en la perspectiva occidental.
2. Aunque la distinción parte/todo desempeña un papel fundamental en el pensamiento occidental, no ocurre lo mismo para los navajo, que «tienden a hablar del mundo aludiendo a procesos, sucesos y flujos, más que a partes y todos o a realidades estáticas claramente discernibles» (pág. 161).
3. En esencia, el espacio navajo es más dinámico que estático. Mientras que nosotros distinguimos objetos y consideramos las relaciones que mantienen entre sí, para los navajos «todo se mueve», aunque puede que la escala temporal implicada no siempre nos permita ver el movimiento.

Claramente, Pinxten y sus colegas han sacado a la luz un sistema espacial complejo que tiene muchos detalles de interés para nosotros. En particular, pone de manifiesto la disyuntiva objeto-proceso en la clasificación del espacio que en la cultura «occidental» se remonta, por lo menos, hasta la Grecia antigua. El punto de vista que Demócrito tenía del espacio y que ha dominado desde entonces el pensamiento «occidental» es el punto de vista «del objeto», mientras que el punto de vista de Heráclito es mucho más parecido al de los navajo. Heráclito indicó que nunca podemos adentrarnos dos veces en el mismo río, una opinión que intuitivamente creemos que sería muy aceptable para los navajo.

¿Qué más podemos aprender acerca de «localizar» a partir de estudios llevados a cabo en otros continentes?

La capacidad de los aborígenes australianos para orientarse en lo que para cualquier otra persona sería un paisaje monótono, ha formado parte del folclor australiano durante muchos años. Cuando un antropólogo preguntó a unos aborígenes qué hacían cuando se perdían, la respuesta fue: «Nos vamos a casa». ¡No tenían el concepto de perderse! El fascinante estudio de Lewis (1976) de su capacidad para encontrar la ruta y orientarse en el espacio, nos muestra dos aspectos que tienen importancia para nosotros. En primer lugar, no hay ninguna duda

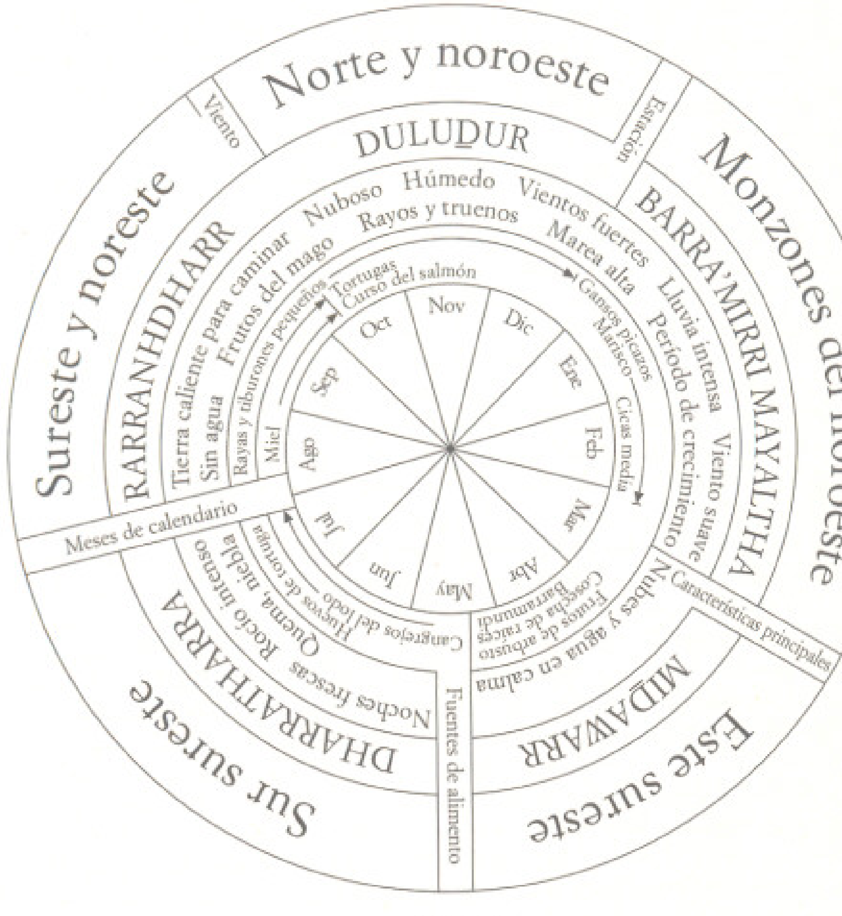


Figura 1

de que las personas estudiadas poseían una especie de brújula interiorizada: como dijo un informador indígena, «los aborígenes conocían el norte, el sur, el este y el oeste antes de la brújula del hombre blanco» (pág. 265). Podían hablar de este sistema y de su empleo —de su relación con el sol y con la temperatura del viento— y sus lenguajes reflejan esta capacidad. Las relaciones íntimas entre las estaciones, las direcciones, la temperatura y el sol están muy bien ilustradas por el calendario de la figura 1 (de Harris, 1984, pág. 11).

Sin embargo, para las ideas específicas de localización, era más importante su intrincado conocimiento del paisaje en relación con sus mitos y con su historia dentro de ese paisaje. Según Lewis: «Los pintupi cantaban los Sueños de cada afloramiento de rocas, lecho de río o llanura, hora tras hora, durante todo el día mientras conducíamos a través de su "país"... Constantemente hacían referencia, en cada contexto concebible, a la red de senderos de Sueño que entrecruzaban la tierra, atestiguando, cabe imaginar, su valor de supervivencia para los nómadas de esta tradición» (pág. 276). Por lo tanto, no sólo conocían *al detalle* el paisaje topográfico: éste también estaba totalmente saturado de historias y de conocimientos sobre hechos históricos y míticos.

Anteriormente, Lewis (1972) había realizado un estudio muy detallado de los métodos de localización empleados por los navegantes polinesios en sus largos viajes por mar y, además de encontrar el uso esperado de las estrellas, también descubrió su íntimo conocimiento topográfico del mar: sus oleajes, las pautas de las olas y sus intersecciones. Su capacidad para relacionar este conocimiento con la posición de las islas era fundamental para su supervivencia y la explicación de Lewis demuestra realmente, mejor que cualquier otro ejemplo, el hecho de que la necesidad relacionada con el entorno estimula el conocimiento intelectual. Curiosamente, los polinesios también habían desarrollado mapas de piedra y madera para simbolizar y representar su conocimiento. Estos mapas no son, por ejemplo, meras representaciones a escala de las islas, sino que también incluyen la representación de los oleajes y las pautas de las olas mediante unas codificaciones especiales.

Es evidente que la navegación ha ejercido una poderosa influencia en el desarrollo de sistemas de registro de información espacial en todos los continentes, ya que requiere la capacidad de documentar información sobre una situación que puede ser invisible para el observador en ese momento. Esto puede suceder, por ejemplo, cuando se desean recorrer grandes distancias por tierra, o cuando se pierde de vista la tierra al viajar por mar, o cuando se instruye a navegantes jóvenes. En consecuencia, no es ninguna sorpresa descubrir la importancia que tenían el sol, el viento y las estrellas para los primeros navegantes de todo el mundo e, incluso hoy, para quienes no emplean ayudas tecnológicas. El estudio de los cielos no se debía únicamente a su portento y belleza: este trabajo también tenía una gran importancia práctica.

Naturalmente, el sol ha tenido una importancia especial para la localización, tanto de una manera formal como informal. Recuerdo haberme sorprendido mucho y haberme sentido muy desorientado cuando descubrí que en el hemisferio sur las sombras «iban en dirección contraria». Sin embargo, desde una perspectiva más formal, las posiciones del orto y el ocaso del sol siempre han tenido un significado místico para el ser humano. Las iglesias cristianas se orientan hacia el «este», es decir, en la dirección del orto, como un legado de anteriores tradiciones «paganas»: de hecho, suelen haber orientaciones más precisas que la simple «hacia el este». Las iglesias nombradas en honor de un santo se solían construir encaradas hacia el orto solar del día correspondiente a ese santo en el año en que se empezaban a construir. Sin embargo, las pirámides de Egipto se orientaron según los puntos cardinales, al igual que muchos otros edificios antiguos. La ciudad antigua de Pekín está orientada hacia los polos norte y sur magnéticos. Además, aunque se ha dado una gran controversia sobre el significado de monumentos, menhires y círculos de piedra como Stonehenge, el campo de la astroarqueología sigue teniendo muchos seguidores.[6]

En la cultura China, el estudio de la geomancia era muy sofisticado y se consideraba una forma muy importante de conocimiento. Ronan (1986), junto con Needham, define la geomancia como «el arte de adaptar las residencias de los vivos y las tumbas de los muertos para que cooperen y armonicen con las corrientes locales del aliento cósmico» (pág. 6). También dice, unas líneas más adelante, que «La historia de la brújula magnética solo se puede comprender en el contexto de este sistema de ideas, porque ésta es la matriz en la que se generó». A continuación ofrece una explicación muy detallada de una brújula geomántica, con cerca de 24 anillos concéntricos en torno a la aguja de la brújula que contienen conjuntos determinados de información como los puntos cardinales, direcciones de estrellas y determinantes astrológicos.

Naturalmente, el impacto de la brújula magnética en los procesos de localización fue enorme, pero la relación con la geomancia, que enlaza una vez más con la predicción, la adivinación y la religión, es importante. De hecho, el desarrollo histórico de todas las ayudas tecnológicas para «localizar» podría dar pie a un capítulo matemático fascinante por derecho propio. La cuerdas anudadas de los kamal, el cayado de Jacob, el astrolabio, la brújula, los relojes de sol y todo el instrumental del agrimensor, contienen en su interior las bases de muchas de las ideas geométricas con las que estamos familiarizados. Sin embargo, la brújula de los geománticos nos ofrece un tipo diferente de dimensión que nos revela la complejidad de la interrelación que ha existido —y que sigue existiendo— entre los fenómenos físicos y «cósmicos». Nos recuerda que debemos tener la precaución de no evaluar las ideas únicamente desde la perspectiva de nuestra tradición «científica». Pero incluso desde esa perspectiva, Ronan y Needham dicen que «aunque la geomancia en sí misma siempre fue una pseudociencia, ello no obsta para que fuera la verdadera madre de nuestro conocimiento sobre el magnetismo terrestre, de la misma manera que la astrología lo fue de la astronomía y la alquimia de la química» (pág. 36).

La literatura antropológica nos da información sobre fenómenos de orientación y localización en todos los continentes y, además de observar similitudes, es indudable que podemos reconocer diferencias entre culturas como resultado de distintas presiones del entorno y culturales. Por ejemplo, aquellos de nosotros que vivimos en sociedades complejas y en su mayoría urbanas, parecemos desear unas localizaciones *precisas* que se manifiestan en un conjunto de preposiciones como en, sobre, tras, bajo. Empleamos estas preposiciones junto con una variedad de sistemas para la localización espacial (puntos cardinales, ángulos, distancias, coordenadas, bloques de edificios, etc.). Sin embargo, para los kpelle, sus

6. Por ejemplo, véase parte de la documentación pertinente en Michell, 1977, Pennick, 1979 y Critchlow, 1979.

nombres para localizar «actúan como sustantivos dependientes»: por ejemplo, donde nosotros diríamos «dentro de casa», los kpelle dirían «la parte inferior de la casa». Según Gay y Cole, «estos términos forman un cuerpo útil y flexible de palabras funcionales con una relevancia geométrica indudable» (pág. 60), y podemos ver que, como ocurría con el lenguaje de contar, el lenguaje de localizar también presenta variedad. Los «sustantivos dependientes» de Gay y Cole se parecen bastante a los nombres de números especializados mencionados unas páginas atrás, que se desarrollaron en función de una necesidad particular planteada por determinados tipos de entorno físico y social.

Littlejohn (1963) también comunica los ricos significados espaciales empleados por el pueblo temne de Sierra Leona. Entre otras cosas, dice esto:

> Para nosotros, los puntos cardinales son coordenadas para establecer una localización. Los temne nunca los emplean de esta manera, aunque si surge la necesidad emplearán uno de ellos para indicar la dirección general en la que se encuentra un lugar. Sus puntos cardinales contienen significados que califican actividades y sucesos de varias maneras... El este y el oeste no sólo son direcciones opuestas en el funcionamiento del intelecto sino opuestos existenciales, siendo el este la dirección que sustenta la vida y el oeste la destructiva... Como el este es «de donde tomamos la dirección», la palabra para norte es «izquierda» y la palabra para sur es «derecha» (págs. 9-10).

Al tratar de comprender las matemáticas como un fenómeno cultural, debemos tener la precaución de no sacar de contexto las ideas con demasiada rapidez. Estos estudios nos recuerdan los profundos valores humanos de la existencia y el significado de la vida que nutren la construcción del conocimiento. Aquellos de nosotros que vivimos en unas sociedades muy orientadas hacia la tecnología, podemos olvidar muy fácilmente las necesidades humanas básicas de satisfacer la coexistencia entre mente, cuerpo, alma y entorno. Tenemos mucho que aprender de las perspectivas diferentes que tienen otras culturas.

No obstante, a pesar de las diferencias que hemos visto en todos los niveles de conocimiento, no puede haber ninguna duda acerca de la universalidad de la actividad de localizar. Podemos empezar a comprender cómo influyen los aspectos reales del entorno espacial en el lenguaje y la representación de localizar, al igual que influye la necesidad societal de coherencia y precisión.

Los mapas son modelos a escala del entorno y, una vez más, los datos antropológicos y culturales disponibles nos muestran que la representación simbólica del entorno espacial está especializada culturalmente. Hay distintas maneras de describir y representar localizaciones, pero mediante las similitudes entre el lenguaje y los mapas podemos ver las raíces de muchas de nuestras ideas geométricas. No es por accidente que, *sobre el papel,* el norte esté arriba, que «horizontal» signifique a lo largo de la página y «vertical» signifique de arriba a abajo. No es por accidente que utilicemos sistemas axiales de dos y tres dimensiones y tampoco es por accidente que gran parte de las imágenes y el lenguaje informal de la

geometría se basen en recorridos y localizaciones en espacios a gran escala como, por ejemplo, «girar 90 grados», «una línea recta entre dos puntos», «la altura de un triángulo», «rotación sobre un punto», «reflexión en un plano». Muchas ideas geométricas familiares se han desarrollado, y continúan desarrollándose, a partir de la actividad universal de localizar.

2.5. Medir

Medir es la tercera actividad «universal» e importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. Aunque todas las culturas reconocen la importancia de ciertas cosas, de nuevo vemos que no todas las culturas valoran las mismas cosas en la misma medida. Gran parte depende del entorno local y de las necesidades que éste provoca.

Normalmente, el entorno local inmediato es el que proporciona las cualidades que se han de medir además de las unidades de medida. Por ejemplo, el cuerpo humano fue, probablemente, el primer dispositivo para medir que se empleó en todas las culturas. Tenemos el ana (la anchura de 6 manos o 24 dedos), el codo, el dedo, el pie, el palmo, el paso y la braza (distancia entre los extremos de dos brazos extendidos), todas ellas medidas muy prácticas de longitud. Estas unidades o sus equivalentes existen en la mayoría de las sociedades.

Sin embargo, cuando realizamos observaciones crosculturales debemos tener la precaución de no dejarnos cegar por nuestros propios sistemas de medida. Por ejemplo, varios estudios han demostrado que, en algunas culturas, no sólo no existen unas unidades independientes similares a las nuestras sino que, además, puede ocurrir que la cualidad particular que nos interesa a nosotros no se cuantifique en absoluto. Por ejemplo, en Papúa-Nueva Guinea, Jones (1974) recopiló datos de varios informadores acerca de cantidades y medidas espaciales, incluyendo afirmaciones como éstas:

> «La unidad local de distancia, que no es muy precisa, es un día de viaje».
> «Se podría decir (que dos huertos ocupan la misma área), pero siempre sería tema de discusión.»
>
> (Al comparar un volumen de roca con otro de agua) «Este tipo de comparación no existe: no hay ninguna razón para hacerla.»

Un estudio similar llevado a cabo por Harris entre grupos aborígenes australianos también encontró abundantes pruebas como las de arriba:

> «No hay ninguna palabra para describir el volumen: no existen unidades locales» (pág. 56).

Sin embargo, había otros datos que ponían de manifiesto otras capacidades o necesidades:

> «Las personas "miden" por medio de una imagen mental o "a ojo". Prácticamente no hay nadie que no pueda comprar un vestido para un pariente simplemente mirando el vestido: casi siempre compran la talla correcta» (pág. 52).
>
> (En relación con el «área») «Las áreas pequeñas se equiparan con un campamento. Cada hombre necesita su propia área o campamento: un espacio en relación con otras familias» (pág. 53).

Uno de mis propios informadores (Bishop, 1979) me contó que en su poblado de Papúa-Nueva Guinea, cuando había disputas sobre las áreas ocupadas por los huertos, la medida empleada era sumar la longitud y la anchura (los huertos eran más o menos rectangulares). Para él, multiplicar estos dos factores era «el sistema del hombre blanco» que había aprendido en la escuela, pero en su casa, ¡siempre sumaba! Como vimos anteriormente, es fácil desestimar estas ideas por considerarlas pintorescas y hasta un poco divertidas, pero suponiendo que los huertos tengan aproximadamente la misma forma, sumar la longitud y la anchura da una medida perfectamente aceptable del área con fines de comparación.

Naturalmente esto implica que, en general, antes de que se desarrollen unidades de medición existe una necesidad cultural evidente de que el lenguaje sea capaz de expresar cualidades mediante algún método comparativo y ordenado. La medición está relacionada con ideas como «más que» y «menos que», porque la necesidad de medir sólo se plantea si se quieren comparar dos o más fenómenos. Como decía antes uno de los informadores de Jones, si no hay razón para comparar un volumen de agua con un volumen de roca, es improbable que el lenguaje contenga las palabras y las estructuras necesarias para establecer esta comparación.

En el apartado dedicado a «contar» mencionábamos los cuantificadores precisos e importantes empleados en el lenguaje de las matemáticas, y en este apartado podemos ver el desarrollo de lo que podríamos denominar cuantificadores comparativos: más pesado, más largo, más rápido, más lento, etc. De hecho, los kpelle tienen una construcción lingüística que permite hacer comparaciones, aunque es evidente que no es una cuestión fácil. Gay y Cole también nos cuentan que había «una tendencia a preferir el concepto "mayor que" al concepto "menor que"» (pág. 49). Este dato está apoyado por el estudio de Jones (1982) con niños de Papúa-Nueva Guinea que adquirían el empleo correcto de «más» antes que el de «menos», si bien experimentaban una gran dificultad con ambos términos cuando se empleaban en un contexto matemático. ¡No obstante, de estos datos parece desprenderse que todo el mundo valora «más» de algo que «menos»!

Comparar más de dos o tres objetos desarrolla otra idea, la de ordenación. Sin duda, hacer estimaciones «a ojo» es una técnica no verbal que se emplea en

todo el mundo para poner objetos en orden, pero a medida que una cualidad crece en importancia y aumenta el número de objetos, el lenguaje desarrolla tanto palabras para los números ordinales (primero, segundo, tercero, etc.) como la «objetivación» de la cualidad (por ejemplo, de «pesado» a «más pesado» y a «peso»). Los términos «adjetivales» preceden a los sustantivos.

En cuanto al desarrollo de unidades y sistemas de unidades, existe una clara progresión donde la idea principal es que cuanto más fuerte sea la necesidad ambiental y social, más detallada, sistemática y precisa será la medición. Cuando Littlejohn (1963) escribe sobre las ideas espaciales de los temne, dice sobre las distancias:

> El espacio ordinario de los temne ni se mide aritméticamente ni se analiza geométricamente. La unidad principal para denotar distancias medias-largas es *angurula*, que significa tanto «el intervalo entre cualesquiera dos aldeas» como «páramo». Como los poblados no están espaciados de una manera uniforme, esto no es tanto una medida aplicada al espacio como un significado dado por la fisonomía del paisaje temne tal como ellos la han aprehendido. Para la estimación de distancias más largas se emplean expresiones como «una jornada de viaje» y, para distancias más cortas, «la distancia suficiente para oír». Cuando nos acercamos a un poblado determinamos la distancia a la que nos encontramos de él por los sonidos que se oyen, especialmente el de machacar arroz, y después el de voces humanas. Para las longitudes cortas, la unidad principal es el *anfatim*, que equivale a la distancia abarcada por los brazos extendidos de un hombre adulto (pág. 4).

Gay y Cole mencionan la unidad llamada «kopi», un cuenco que se emplea mucho para medir el arroz, y de su estudio se desprende claramente que los kpelle son muy diestros en el empleo de esta medida. Por ejemplo, en comparación con los investigadores estadounidenses, eran mucho mejores al estimar cuántos cuencos de arroz había en un recipiente dado. También ofrecen ejemplos que muestran cómo se pueden combinar unidades: un informador dijo que un balde contiene 24 cuencos de arroz y que un bidón (otro «patrón» de medida) contiene 44 cuencos de arroz, medidas muy cercanas a las medidas aritméticas reales. Para los kpelle, el arroz es un producto muy importante: de ahí la coherencia interna y la complejidad de las medidas asociadas con él.

Harris también presenta datos relacionados con un sistema de medida basado en artefactos locales («local» significa aquí «disponible de inmediato» en vez de «perteneciente a la cultura indígena»). La autora cita a un informador que habla de medidas de peso:

> «"frutas" (¡el nombre de la unidad!).
> En la extracción de minerales: latas de fruta grandes (2 kilos y cuarto) individualmente.
> 14 frutas = 1 bolsa
> 80 frutas = 1 tambor de mineral de 200 litros» (pág. 53).

Zaslavsky, además de mencionar las medidas corporales empleadas para medir la longitud (los ganda de Uganda hablan de *mukono,* unidad equivalente al codo y que es la distancia desde el codo hasta la punta del dedo medio extendido), también nos habla de una canasta que contiene unos 4 kilos y medio, un paquete de granos de café y un cesto de boniatos, todas ellas medidas estándar para los habitantes del lugar, ¡pero con ese elemento de imprecisión que permite negociar las transacciones comerciales! Zaslavsky cita el antiguo proverbio etíope que dice: «Mide diez veces y corta el paño sólo una».

Zaslavsky también documenta la amplia variedad de artículos empleados como moneda en África (en el índice de su libro no se encuentran referencias a «dinero»: simplemente dice «véase Moneda»). Debajo de «moneda» la autora coloca la siguiente lista:

cuentas
varillas de latón
paño
monedas
armas de fuego y alcohol
azadas
barras de hierro
discos de marfil
ganado
pulseras
rupias
sal
otros
Véase también conchas de Cauri, como moneda; Oro.

La rareza y la conveniencia se combinan para determinar las medidas de «valor económico» que llamamos moneda. Un artículo que no aparece en esa lista es «personas» aunque, a juzgar por la brutal manera en que fueron tratados durante el comercio de esclavos, quizá pocas veces recibieron la consideración de «personas». Sin duda, los propietarios de esclavos los conceptualizaban en la misma categoría que el ganado. En cualquier caso, y por muy desagradable que hoy nos pueda parecer, también eran tratados meramente como moneda: una medida del valor económico.

Es evidente que la medición está profundamente sumergida en la vida económica y comercial. Por lo tanto, es indudable que además de implicar aspectos numéricos, la medición también presenta un fuerte aspecto social, como acabamos de ver.

Gay y Cole documentan otro ejemplo excelente según el cual «el cuenco que utiliza el comerciante para comprar arroz tiene el fondo redondeado por un largo y concienzudo martilleo, pero el cuenco que emplea para *vender* arroz no tiene el fondo redondeado. Ésta es la fuente de su ganancia» (pág. 64). Leach (1973)

hace la siguiente observación crucial sobre este aspecto de la medición: «Una peculiaridad de la sociedad científica es que una escala ideal debe ser inequívoca y exacta; en otras condiciones, las personas han preferido escalas fáciles de usar. Cuando el criterio para una buena escala es su conveniencia, un exceso de precisión puede convertirse en un inconveniente» (pág. 139).

Por lo tanto, no necesariamente debe valorarse mucho la precisión: su valor depende del propósito de la medición. Para aquellos de nosotros que vivimos en una cultura más orientada matemáticamente, la necesidad de que la ciencia tenga una precisión cada vez mayor en sus medidas parece haberse filtrado hacia la cultura general. El peligro que esto tiene para nosotros es que tendemos a generalizar en exceso esta necesidad de medir con precisión o, como comenta Eshiwani (1979), «Uno de los puntos débiles de las personas criadas en una tradición matemática/científica es que tienden a suponer que lo que no pueden cuantificar o medir fácilmente es insignificante. Naturalmente, nada podría estar más lejos de la verdad» (pág. 35).

En nuestra sociedad, damos tan por sentado que las medidas deben ser precisas que las «imprecisiones» y las «incoherencias» son causa de preocupación. Queda en manos de los antropólogos indicar por qué nuestra enculturación nos hace ver otros enfoques como diferentes o incluso «erróneos». Biersack (1978), en su trabajo con los paiela —un pueblo de las tierras altas de Papúa-Nueva Guinea— describe su manera de comprender los fenómenos espaciales y la autora llega a la conclusión de que «significa que el tamaño (para ellos) sería como el valor (para nosotros), es decir, no algo absoluto o evaluado mediante medidas objetivas, sino algo relativo y dependiente de los factores subjetivos de la evaluación y de la escala de comparación».

De hecho, quizá nuestros puntos de vista han acabado por distorsionarse. Quizá el desarrollo de medidas cada vez más precisas ha ampliado de alguna manera el valor que atribuimos a las cualidades. Tomemos el *tiempo* como ejemplo. Los kpelle tiene palabras para «día», «semana», «mes» y «año», aunque según Gay y Cole: «Todos muestran más el carácter del tiempo que el transcurso de una cantidad definida de tiempo [¿De nuevo el aspecto adjetival? AJB]. El día es el período de luz, cuando el sol ha salido... La semana es el período que finaliza en un día de mercado» (pág. 71). No existe un sistema interrelacionado de unidades, sino que las palabras dedicadas al tiempo están relacionadas con sucesos o fenómenos sociales de importancia. Zaslavsky confirma este punto de vista dentro de la sociedad africana en general y también comunica la presencia de semanas medidas de varias maneras: «La economía de mercado se vincula con una semana de tres, cuatro, cinco, seis, siete u ocho días» (pág. 64). Es evidente que no se considera necesaria la precisión que ofrecen los sofisticados relojes digitales de hoy, y esto puede hacer que nos preguntemos hasta qué punto necesitan este grado de precisión las personas que llevan estos relojes. La economía de mercado está vinculada con otro tipo de escala temporal: una escala temporal más natural, del mundo vivo, donde se deben tomar en consideración otros valores.

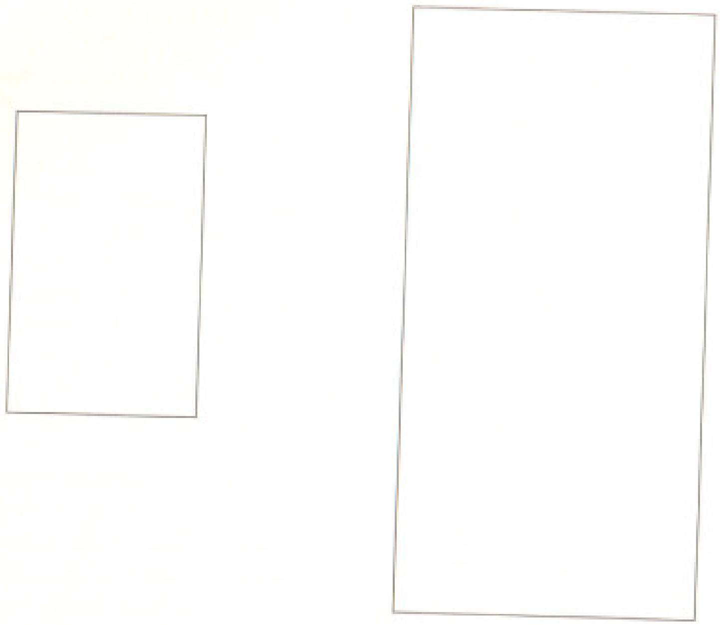


Figura 2

Cuando pregunté a mi informador de Papúa-Nueva Guinea por las áreas de los huertos de su poblado, dibujé dos rectángulos (figura 2) y le pregunté que, si esos dos rectángulos fueran huertos, ¿cuál preferiría poseer? «Depende de muchas cosas», dijo, «del suelo, la sombra, el drenaje...». Estaba claro que *mi* así llamada educación «matemática» me había hecho observar *únicamente* la relación entre los tamaños numéricos de los dos huertos. Para mi informador, el tamaño del huerto era, en muchas aspectos, su característica menos importante.

2.6. Diseñar

En el primer capítulo me referí a la noción de tecnología y a su papel en la conformación del entorno. Por lo tanto, es importante describir una actividad generalizada que resuma esta idea y he optado por denominarla «diseñar». Mientras que las actividades relacionadas con «localizar» se refieren a la situación de uno mismo y de otros objetos en el entorno espacial, las actividades de diseño se refieren a la tecnología, los artefactos y los objetos «manufacturados» que todas las culturas crean para su vida doméstica, para el comercio, como adorno, para la guerra, para jugar y con fines religiosos. Además, el diseño se puede aplicar al entorno espacial mismo como en el caso de las casas, las aldeas, los huertos, los campos, las carreteras y hasta las ciudades.

La esencia de diseñar es transformar una parte de la naturaleza, es decir, tomar un fenómeno natural, sea madera, arcilla o terreno y transformarlo en otra cosa: quizá un ornamento tallado, una olla o un huerto. Diseñar implica imponer una estructura particular a la naturaleza. Cuando vamos caminando y nos encontramos una rama de árbol en medio del camino, podemos quitarle las partes innecesarias, darle una longitud conveniente y convertirla en un bastón. Todos los bastones son diferentes y al mismo tiempo son similares. Tenemos un «diseño» en la mente que podemos imponer a esa rama. O podríamos cortarla de otra manera, quitarle otras partes, llevárnosla a casa, pulir algunas partes ásperas y barnizarla, porque creemos que quedará bien sobre una mesa, como objeto de arte.

Diseñar implica imaginar la naturaleza sin las partes «innecesarias» y quizá incluso destacar algunos aspectos por encima de otros. Así pues, diseñar consiste, en gran medida, en abstraer una forma del entorno natural. Por esta razón he optado por centrarme (con fines matemáticos) más en «diseñar» que en «hacer». El producto acabado en sí no es matemáticamente importante, mientras que *sí puede* serlo en el desarrollo de ideas científicas, donde nos suelen interesar las propiedades reales de la materia. Lo que es importante para nosotros en la educación matemática es el plan, la estructura, la forma imaginada, la relación espacial percibida entre objeto y propósito, la forma abstracta y el proceso de abstracción.

Todas las culturas diseñan cosas pero, como cabría esperar, cada una las diseña de una manera diferente y la cantidad de formas diseñadas también difiere notablemente de una cultura a otra. Lo que se diseña depende de la necesidad percibida —por ejemplo, para cultivar, como protección o como adorno— y también del material disponible. Por ejemplo, la escultura, sea utilitaria o decorativa, se da en regiones donde la madera o la piedra son abundantes, mientras que para tejer y trenzar hace falta lana, fibras, hierba, juncos, etc. No obstante, las casas presentan algunas similitudes en todo el mundo, sean iglúes, chozas de adobe, cabañas de madera con techado de hierba, o casas con tejas y ladrillos. Entre otras cosas, suelen ser circulares o rectangulares, a veces cuadradas. Las cucharas suelen constar de una parte circular ahuecada y un mango recto, las ollas suelen ser circulares y las lanzas son rectas.

El diseño de objetos ofrece la posibilidad de imaginar formas, figuras y pautas en el entorno. Naturalmente, esto no significa que las formas, las figuras y las pautas no se den en el entorno natural, sino que cuando las formas se trazan, realizan y diseñan las formas *mismas* se convierten en centro de atención. Consideremos la representación de la naturaleza en vez del diseño de utensilios. Por ejemplo, tanto si hablamos de pinturas rupestres de animales, de tallas de seres humanos en madera o de esculturas esquimales de mamíferos marinos en piedra, es evidente que el diseñador ha elegido destacar algunas características e ignorar otras. La *idea* de forma o figura se desarrolla con el diseño y la representación.

La variedad y la cantidad de formas diseñadas es abrumadora incluso en sociedades rurales y relativamente «naturales». Con frecuencia se ha destacado que la fabricación de instrumentos ha hecho que el hombre evolucionara como ningún otro animal (véase Bruner, 1964). Este pensamiento condujo a White a argumentar que el desarrollo tecnológico del hombre ha «dirigido» los aspectos sociales, filosóficos y sentimentales de la cultura. Esta idea ha sido desarrollada aún más por Oswalt (1976), que ha concebido la noción de «tecnounidades» mediante las cuales podemos comparar culturas y sociedades desde el punto de vista de la variedad y la cantidad de «elementos de subsistencia» (instrumentos, armas, etc.) que han diseñado. Aunque no deseo adentrarme demasiado en la vía particular de investigación trazada por Oswalt, creo que es sumamente interesante que este autor se centre implícitamente más en el diseño de objetos que en su mera fabricación. Oswalt ha acuñado la expresión «plantilla mental» para describir lo que yo he llamado forma, figura y estructura. Por ejemplo, Oswalt dice: «La idea de *hoja cortante* como entidad estructural es mucho más importante que el material concreto empleado para fabricarla» y «Por lo tanto, la estructura o la forma, no la técnica de producción o el material, es lo que adquiere mayor importancia al intentar hacer comparaciones tecnológicas de gran alcance desde una base croscultural» (pág. 37).

En cierto modo, esta «plantilla mental» está representada por el objeto diseñado y es interesante observar que un objeto sirve para representar el diseño por medio del cual se pueden construir otros objetos. En particular, sabemos que la imitación y la copia son las principales maneras de conservar formas diseñadas. Naturalmente, el hombre ha desarrollado otras maneras de representar diseños, especialmente dibujando en la arena, construyendo modelos o, más adelante, dibujando en papel y en pantallas electrónicas. Todos estos desarrollos han sido creados por la necesidad de considerar aspectos de la forma diseñada sin tener que hacer realmente el objeto. Naturalmente, esta necesidad es más grande cuando se diseñan «objetos» muy grandes como terrenos agrícolas, huertos, obeliscos y monumentos, aunque también será importante si el material de que está hecho el objeto es caro, raro o las dos cosas.[7] Es fácil ver la medida en que necesidades como éstas han creado una demanda de ideas importantes matemáticas relacio-

7. Obsérvese de nuevo que el desarrollo de las ideas simbólicas está provocado por la *ausencia* del objeto físico:

Contar:	Los tabúes que conducen a un conteo indirecto.
	Cuando no podemos «conocer» los objetos individualmente.
Localizar:	Cuando no podemos ver la isla, o el lugar que buscamos.
Medir:	Cuando no podemos yuxtaponer físicamente los dos objetos que comparamos.
Diseñar:	Cuando obtener una «copia» es demasiado caro o la copia es demasiado grande.

Por lo tanto, las matemáticas parecen desarrollarse cuando se provoca una actividad imaginada o hipotética.

nadas con la forma, el tamaño, la escala, la medida y muchos otros conceptos geométricos.

Otros investigadores también se han sorprendido ante la *potencialidad* geométrica y matemática de muchas de las formas diseñadas que se encuentran en todas las culturas (véase, por ejemplo, Pinxten, 1983). Zaslavsky (1973) también documenta la rica tradición geométrica de los diseños decorativos de las sociedades africanas. Esta autora cita como ejemplos las pesas de bronce de los asante, los estampados de los vestidos del África oriental, las pautas entrelazadas de los tejidos y las redes de pesca del arte kuba y el arte benin en general. También describe la arquitectura de los pueblos africanos, mostrando que las casas suelen tener formas circulares o rectangulares, con algunos diseños más sofisticados basados en éstos.

Gay y Cole confirman esto con el hecho de que los kpelle poseen una tecnología desarrollada para construir sus casas con métodos para trazar ángulos rectos y círculos. «Saben que si los lados opuestos de un cuadrilátero tienen la misma longitud y si las diagonales también miden lo mismo, la figura resultante será un rectángulo» (pág. 61). Gay y Cole también añaden que «No verbalizan estas reglas pero conocen el procedimiento».

La «forma» del ángulo recto y el triángulo rectángulo son familiares en varias culturas y en la China existían las ahora famosas soluciones «chinas» al teorema de Pitágoras (véase Ronan, 1981). El empleo de «triángulos» de cuerda para medir ángulos rectos era una aplicación interesante y poderosa de este conocimiento. Los círculos también desempeñan una papel importante en representaciones simbólicas como los *mandalas,* los hermosos dibujos contemplativos del subcontinente indio. De hecho, cuadrados, triángulos, pentágonos, pentagramas, heptágonos y octógonos, han desempeñado un papel simbólico ayudando al hombre a imaginar relaciones entre fenómenos.

Gerdes, en varios artículos (véase, por ejemplo, Gerdes, 1986) nos ofrece ejemplos de ideas matemáticas inherentes en el trabajo de diseño de los artesanos mozambiqueños y apoya con fuerza el reconocimiento de este trabajo matemático en su currículo escolar para que «mediante la descongelación de estas matemáticas congeladas, mediante el redescubrimiento de las matemáticas ocultas en nuestra cultura mozambiqueña, realmente demostremos que nuestro pueblo, como todos los otros pueblos, hacía matemática» (pág. 12).

Otro tipo de prueba material que plantea un reto a quienes estamos educados en la creencia de que las ideas geométricas fueron inventadas únicamente por los antiguos griegos, es la cantería neolítica analizada recientemente en Gran Bretaña (véase, por ejemplo, Critchlow, 1979). En un libro que está lleno de ideas provocadoras acerca del diseño primitivo, Critchlow presenta fotografías de esferas de piedra tallada y de formas esféricas que demuestran que los «sólidos platónicos» ya existían un milenio antes de los tiempos de Platón. Estas formas talladas son verdaderamente sorprendentes por su precisión y belleza y la fotografía de Rod Bull les hace justicia. Como otros libros mencionados, los datos y las ideas presentados por Critchlow no dejan ninguna duda de que el pensamiento matemático era y es un fenómeno generalizado.

Sin embargo, una introducción cultural al pensamiento geométrico mediante la actividad de diseñar y la idea de forma no sería completa sin una referencia a la importancia de la espiral. Mientras que los instrumentos y la tecnología han avivado muchos pensamientos geométricos desde una perspectiva práctica y los ornamentos y las decoraciones han apelado a nuestra naturaleza artística, existe otra dimensión totalmente distinta sugerida por la espiral.

Una de las formas más simples de diseño nos da esta forma profunda. Una manera fácil de hacer una vasija de arcilla consiste en formar un cilindro largo y delgado y después enroscarlo sobre sí mismo una y otra vez hasta que podamos transformar los lados en una vasija del tamaño deseado. Los espacios se pueden rellenar, los lados se pueden alisar y se puede dar a la abertura un acabado con la decoración que deseemos. La vasija en espiral también tiene equivalente en paja: la estera en espiral que se puede transformar en un cesto en espiral. La tecnología es relativamente simple, pero la forma básica en sí no lo es.

En un libro maravillosamente ilustrado, *The Mystic Spiral*, Jill Purce (1974) nos muestra en qué medida se puede relacionar el pensamiento matemático con el significado del lugar del hombre en la infinidad del espacio y el tiempo. La espiral, que aparece de tantas maneras en la naturaleza, es una forma que tiene su existencia en el «ahora y aquí» pero que no tiene principio ni fin. Llega a ser infinitamente pequeña en un sentido e infinitamente grande en otro. Como dice Purce, «denota eternidad, porque puede seguir por siempre. Pero como nosotros necesariamente concebimos lo infinito en nuestros propios términos y, en consecuencia, en términos finitos, nos vemos forzados a limitar lo ilimitado. Sólo imponiendo límites podemos hacer que lo infinito nos sea accesible».[8]

Mediante las ilustraciones elegidas, Purce muestra lo importante que ha sido y continúa siendo la espiral en muchas culturas de todo el mundo. La autora la vincula con laberintos, con vórtices esféricos, con bailes (los giros de los derviches), con la mitología y la religión, con lo natural y lo sobrenatural, con los mandalas y otros diagramas contemplativos, con la astronomía y con los calendarios. Como hemos visto, la estructura enroscada de las vasijas de arcilla y las esteras de paja nos da una aplicación práctica, pero en nuestra reflexión cultural sobre la actividad matemática la importancia de la espiral es más mística que práctica. Nos recuerda, si es que hace falta, que el pensamiento matemático se ocupa esencialmente de la imaginación y no de la fabricación, y que nuestra imaginación está alimentada por sentimientos y creencias, al igual que lo está por figuras y objetos.

8. No es por accidente que otro profundo libro sobre la forma, escrito por Doczi (1981), se llame *The Power of Limits* y esté escrito por un arquitecto.

2.7. Jugar

A primera vista, la inclusión de jugar en una colección de actividades pertinentes al desarrollo de las ideas matemáticas puede parecer extraña, hasta que nos damos cuenta de la gran cantidad de juegos que tienen conexiones matemáticas. Su inclusión es aún más importante cuando abordamos la educación Matemática desde una perspectiva antropológica y cultural, a causa de la extensa documentación sobre juegos y sobre la actividad de jugar en todo el mundo. Esto nos obliga a darnos cuenta de la importancia que ha tenido «jugar» en el desarrollo de la cultura.

En todas las culturas se juega y, más importante aún, ¡todas las culturas se toman la actividad de jugar muy en serio! Con esto quiero decir que es esencial *no* tratar el juego como un aspecto relativamente poco importante de la vida cultural. Por ejemplo, Norbeck (1977), en su discurso «Johan Huizinga» durante la primera reunión anual de la Association for the Anthropological Study of Play, cita el trabajo clásico de Huizinga, «Homo Ludens» (1949): «El espíritu de la competición lúdica es, como impulso social, más antiguo que la cultura misma e impregna toda la vida como un fermento cultural...» (pág. 173). Huizinga, según Norbeck, también caracteriza la actividad de jugar con términos como éstos:

— Voluntaria, libre.
— No es una tarea, no es ordinaria, no es real.
— Esencialmente poco seria en sus metas, a pesar de que se suele practicar en serio.
— Ajena en sí misma a satisfacciones inmediatas, aunque es una parte integral de la vida y una necesidad.
— Repetitiva.
— Estrechamente vinculada con la belleza de muchas maneras, pero no idéntica a ella.
— Crea orden y es orden; tiene reglas, ritmos y armonía.
— Con frecuencia está relacionada con el ingenio y el humor, pero no es sinónima de ellos.
— Tiene elementos de tensión, incertidumbre, fortuna.
— Ajena a las antítesis de sabiduría y locura, verdad y falsedad, bondad y maldad, vicio y virtud, carece de función moral.

Sin duda, jugar es un tipo de actividad social de carácter diferente a cualquier otro tipo de interacción social mencionado hasta ahora: la actividad se produce en el contexto de un juego y los participantes se convierten en jugadores. El límite entre lo real y lo irreal está bien establecido y los jugadores *sólo* pueden jugar con otros jugadores si todos se ponen de acuerdo en no comportarse «normalmente».

¿Pueden estas características encontrarse en la raíz del pensamiento hipotético? ¿Puede el juego representar la primera etapa de distanciamiento de la realidad para reflexionar sobre ella y quizá para imaginar su modificación? De hecho, Vygotsky (1978) argumentó que «la influencia del juego en el desarrollo del niño es enorme» (pág. 96) porque la acción y el significado se pueden separar y dar origen al pensamiento abstracto.

Sin embargo, sería erróneo concebir la actividad de jugar y los juegos sólo como actividades infantiles. Es cierto que los juegos infantiles desempeñan diversas funciones, especialmente en el proceso de enculturación, pero también es importante reconocer el juego como una actividad adulta. De hecho, nos podríamos preguntar si juega más el adulto que el niño (como observó un comentarista, «simplemente se trata de que los juguetes sean más grandes y más caros a medida que uno se hace mayor»).

Por lo tanto, si en primer lugar examinamos la actividad de jugar como una actividad adulta significativa, inmediatamente nos llamará la atención el hecho de que en la literatura antropológica no escasean las clasificaciones del juego. Walter Roth (1902) produjo una descripción muy detallada de los juegos de los aborígenes australianos que descubrió en su área de Queensland. Agrupó estos juegos en siete categorías:

Juegos imaginativos: por ejemplo, contar fábulas, leyendas, etc., juzgados por su inteligencia y humor.

Juegos realistas: placeres derivados de objetos reales de la naturaleza, orgánicos e inorgánicos; por ejemplo, jugar con animales, deslizarse por el lodo.

Juegos imitativos: incluye la mayor cantidad de juegos, que eran de dos tipos:

1. Juegos donde se imitan aspectos y objetos de la naturaleza mediante movimientos, gestos y juegos con cuerdas («la hamaca india»).
2. Juegos imitativos infantiles donde se imitan actividades de los adultos.

Juegos de discriminar: por ejemplo, el escondite y juegos de adivinación.

Juegos de disputa: como tirar de la cuerda y luchar.

Juegos de impulsión: con juguetes que implican alguna forma de movimiento, como peonzas, pelotas, bolos.

Juegos de exultación: incluyendo música, canciones, baile y otras diversiones.

Ahora ya está claro que, si bien las características de «jugar» (*play*) tal como las describe Huizinga se pueden ver en la lista de juegos de Roth, la noción de «juego» (*game*) es más restringida que la de «jugar». Parece como si «jugar» fuera la actividad general (y por esta razón la he elegido para encabezar este apartado) y que la idea de «juego» es una formalización de la primera. De hecho, po-

demos concebir el «juego» como una forma y una «representación» de «jugar». Con esto quiero decir que cada actividad que se describe en este capítulo desarrolla su propia forma de representación: contar desarrolla el lenguaje, las imágenes y los sistemas numéricos; localizar desarrolla el lenguaje y las imágenes espaciales y los sistemas de coordenadas; medir desarrolla el lenguaje de los cuantificadores y las unidades y los sistemas de medición; diseñar desarrolla imágenes, formas e ideas geométricas. «Jugar» parece desarrollar la idea de «juego».

Por lo tanto, todos los grupos culturales juegan y todos desarrollan juegos, de tipos diferentes y en grados distintos. Sin embargo, y como ocurre con otros apartados de este capítulo, sorprende observar lo comunes que son determinados juegos en todo el mundo. Por ejemplo, no sólo podemos encontrar los siete tipos de juego de Roth en todas las culturas, sino que también podemos encontrar exactamente los mismos juegos. Es evidente que esto se podría prever, por ejemplo, en los juegos de disputa basados en la habilidad física y en los juegos de exultación basados en canciones y bailes. Nos podría sorprender un poco más ver que los juegos con cuerdas son tan universales (véase, por ejemplo, Jayne, 1962). De hecho, los juegos con cuerdas se practican en todos los continentes y en todo tipo de entorno. También cabría esperar que esto se diera en situaciones donde la vegetación crece en abundancia, pero para mí fue una sorpresa descubrir que también los esquimales tienen muchos juegos basados en cuerdas.

Otro aspecto interesante de los juegos y de las figuras basadas en cuerdas es que Roth los clasifica como «imitativos» porque muchos de ellos son representaciones, hechas con cuerdas, de objetos o situaciones reales como, por ejemplo, «dos muchachos con lanzas» o «una bolsa de canguro». Además, la categoría de «juegos imitativos» contenía el mayor número de juegos en la lista de Roth. (Uno se siente impelido a preguntar si esto se aplica a todos los grupos culturales o sólo a los grupos concretos que estudió Roth). Sin duda, la imitación, o la representación de la realidad, es una característica de muchos juegos y tiene mucha importancia para nuestros fines. Es otro aspecto de abstraer ciertas formas y estructuras de la realidad, como se describió en el apartado dedicado a «diseñar».

Lancy y Tindall (1977) describen muy bien esta cuestión en el siguiente párrafo sobre el juego de los niños kpelle:

> Jugar a cazar es bastante parecido al juego de fantasía porque se escenifican situaciones reales. Pero ahora, ciertos aspectos de la realidad se abstraen mucho y se añaden reglas, como en un juego donde el objetivo reside en lanzar flechas a un blanco. El arco y la flecha son armas de caza y el blanco puede tener el nombre de un antílope, pero la caza se reduce al momento de lanzar. Las reglas especifican que cada jugador se debe situar detrás de una línea para tirar y que sólo puede lanzar cuatro flechas. Los turnos son rotatorios, y así sucesivamente (pág. 85).

Como ocurría con «diseñar», la calidad de la forma desarrollada en el juego puede llegar a ser valorada por méritos propios. Como la actividad de jugar es esencialmente poco seria en sus metas, según indicaba Huizinga, su ejecución se convierte en su propia gratificación. Por lo tanto, las figuras de cuerda y otras formas de juego llegan a tener interés en sí mismas y de nuevo podemos ver aquí las raíces de la apreciación artística y estética. La forma del juego puede ser musical, como en los juegos exultativos de Roth o parecerse a una historia, como en los juegos imaginativos. Sin duda, los placeres de la apreciación estética explican la popularidad y la longevidad de muchos juegos y actividades lúdicas en todos los grupos culturales.

Cuando la forma de la misma actividad de jugar se convierte en el centro y se desarrolla un «juego», las reglas, los procedimientos, las tareas y los criterios se formalizan y ritualizan. También ellos son productos de «jugar». Los juegos suelen ser apreciados por los matemáticos a causa de su conducta gobernada por reglas que, según se dice, es como la matemática misma. Creo que no es demasiado difícil imaginar cómo se han desarrollado los criterios gobernados por reglas de la matemática a partir de los placeres y las satisfacciones de la conducta gobernada por reglas de juego. Dentro de lo que Huizinga denomina gráficamente «el círculo mágico» del juego, la conducta gobernada por reglas es el interés principal. Y no hay duda de que personas de todas partes, adultos y niños, disfrutan participando en la conducta gobernada por reglas de juego, quizá porque estos son, a diferencia de la realidad, situaciones sociales donde todos los jugadores conocen las reglas y están de acuerdo en guiarse por ellas. ¿Quizá todos deseamos en secreto más coherencia en nuestra realidad social?

Otras dos situaciones de juego que, como los juegos con cuerdas, están asombrosamente extendidas, son los juegos de mesa y los juegos de azar, que tienen un gran interés para nosotros. Zaslavsky documenta lo que ella denomina «el juego más antiguo del mundo», el juego de mesa llamado, dependiendo del lugar, mancala, wari, oware, soro, omweso, ayo, adi y centenares de nombres más a través de África. Este juego consiste en varias cavidades o huecos en los que se distribuyen semillas o guijarros según diversas reglas, con el objetivo de capturar todas las semillas o guijarros del contrario. La cantidad de huecos, filas y semillas varía, pero el espíritu del juego es el mismo en todas partes. Se puede jugar puramente al azar pero también se puede jugar con estrategia y astucia, con los jugadores realizando cálculos a velocidad de relámpago. (Como en el kuns, el juego de cartas de los aborígenes australianos, los números no son infinitos pero sus *combinaciones* tienen una importancia fundamental). Como uno de los juegos «de mesa» más antiguos hoy existentes, sus imágenes de granos, su modelización de tesoros, de capturar la riqueza del contrario, etc., nos ayudan a ver las raíces prácticas y sociales de este funcionamiento hipotético y, a medida que el juego ganaba en importancia, es fácil imaginar el cambio desde el mero azar y el ritual hasta la estrategia, la previsión y la astucia. Los juegos de mesa abundan en el mundo y, como el mancala y sus variantes, y el ajedrez y sus variantes, se puede ver que todos tienen su origen en alguna modelización de la realidad. Esta modelización tiene una importancia fundamental en el desarrollo matemático.

El ajedrez también nos proporciona un interesante vínculo con otra idea, la de predicción. Una vez más, al llevar a cabo las investigaciones para este libro me sorprendieron enormemente los datos que encontré. Ronan (1986), trabajando con los textos de Needham sobre la China, ha escrito un capítulo llamado «Magnetismo y electricidad» que describe muchos de los datos relacionados con las invenciones vinculadas con la magnetita, la roca magnética de origen natural. Después de unos apartados que tratan aspectos de la geomancia y a los que ya me he referido en el apartado dedicado a «localizar», nos encontramos con uno titulado «El imán, la adivinación y el ajedrez». El ajedrez tiene muchas conexiones con la predicción y la adivinación, y parece que en las dinastías chinas antiguas, antes de que el ajedrez llegara a la India y se convirtiera en el juego «bélico» que conocemos hoy, las piezas se solían arrojar sobre el tablero y los adivinos interpretaban sus posiciones para predecir acontecimientos futuros. En una variante concreta, las piezas de ajedrez se hacían con magnetita para que interaccionaran entre sí.

Por lo tanto, el ajedrez no se originó como un juego bélico de estrategia y táctica, sino como una ayuda para los adivinos orientada a predecir el futuro. Ronan y Needham insinúan otras conexiones:

> Aunque no podemos embarcarnos aquí en la historia de todos los juegos y todas las técnicas de adivinación chinas, es evidente que, desde los períodos más antiguos, echar cosas se prestaba tanto a la adivinación como a los juegos. En uno de los más antiguos se tiraban flechas a una vasija... Sólo hacían falta marcas o números en las flechas para tener objetos que, por compresión, se convertirían en dados y, por extensión y despliegue, darían origen a las fichas del dominó por un lado y a los juegos de cartas por otro (pág. 55).

Como sabemos, los juegos de azar tienen un atractivo mundial y las apuestas no se hacen únicamente para obtener riquezas. Todavía tienen mucho que ver con la predicción del futuro y presentan unos amplios vínculos conceptuales con la astrología, una de las ciencias aplicadas más antiguas. Naturalmente, no pretendo decir que una persona dedicada afanosamente a perder dinero con una máquina tragaperras esté desarrollando comprensión matemática. ¡De hecho, la reticencia a emprender una búsqueda tan «infructuosa» podría ser una medida de una comprensión matemática adecuada! Sin embargo, los juegos de azar son otra forma de juego culturalmente generalizada por las razones que sea y normalmente, aunque no siempre, es una actividad exclusiva de los adultos. En los juegos de azar, el modelado de los «altibajos» de la vida es evidente, al igual que la idea de arriesgarse. Como en todos los juegos, estos riesgos se aceptan en un micromundo protegido y limitado por reglas que, en cierta medida, puede proteger a los jugadores, y vemos nuevamente que «seguir el juego» permite a los jugadores practicar técnicas de predicción, adivinación, estimación, conjetura e ingenio lejos de la dura realidad de la vida. Perder en la vida real no es un objetivo por el que valga la pena apostar, pero a un juego siempre se puede jugar otra vez y, ¿quién sabe qué puede suceder entonces?

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 3

Hay otro aspecto del juego que vale la pena considerar aquí: el valor que tiene para el desarrollo matemático lo que podríamos llamar juegos «solitarios», es decir, juegos a los que juega uno solo. Aunque hasta ahora no he limitado la discusión, este apartado se podría haber leído como si jugar fuera por entero un fenómeno social que exigiera dos o más personas. No era ésta la intención pero, ya que se ha planteado, consideremos específicamente la situación del «solitario». Podemos ver que muchos juegos con cuerdas caerían en esta categoría, al igual que algunos juegos de mesa y algunos juegos de azar.

Un buen ejemplo de este aspecto es el «cuadrado mágico»: una pauta de números que sigue unas reglas determinadas. Los cuadrados mágicos no son sólo muy antiguos sino que también están muy extendidos: por ejemplo, el de la figura 3 ha aparecido en manuscritos chinos, hebreos, árabes e indios.

Los placeres y las satisfacciones de jugar con números de esta manera pueden verse como la fuerza impulsora de desarrollos matemáticos interesantes. De manera similar, «jugar» con formas, medidas y localizaciones para ver qué estructuras permiten que las ideas encajen satisfactoriamente entre sí, tiene todas las características de la actividad investigadora matemática.[9]

En general, me sorprendió ver la relativa escasez de literatura acerca de la importancia del juego para la educación desde una perspectiva cultural. De hecho, me sentí bastante decepcionado cuando me encontré con un artículo titulado «Juegos y deportes: elementos ausentes en la psicología crosscultural» (Hopkins y Wober, 1973) que confirmaba esta carencia. No tengo ninguna duda, y espero que a estas alturas tampoco la tenga el lector, de que jugar es una actividad crucial para el desarrollo matemático y, en consecuencia, espero que la base de datos antropológicos e crosculturales se enriquezca más para que podamos explotar educativamente la importancia que tiene esta actividad universal en el crecimiento cultural.

9. Por ejemplo, véase en Falkener (1961) una excelente exposición sobre juegos y cuadrados mágicos.

2.8. Explicar

A la sexta y última actividad «universal» la llamo «explicar»: la actividad que eleva la cognición humana por encima del nivel asociado con la mera experiencia del entorno. Explicar centra la atención en las abstracciones y formalizaciones que se derivan de las otras actividades y, mientras que éstas tienen que ver con la respuesta a preguntas relativamente simples como «¿Cuántos?», «¿Donde?», «¿Cuánto?», «¿Qué?» y «¿Cómo?», explicar se ocupa con responder a la compleja pregunta «¿Por qué?».

Explicar es la actividad de exponer las relaciones existentes entre unos fenómenos, y la «búsqueda de una teoría explicativa», como la describe Horton (1967), «es, básicamente, la búsqueda de la unidad que subyace a la aparente diversidad; de la simplicidad que subyace a la aparente complejidad; del orden que subyace al aparente desorden; de la regularidad que subyace a la aparente anomalía» (pág. 209). O, como dijera Bateson (1972), lo que se busca es «la pauta que conecta».

La relación explicativa más importante se ocupa de la similitud. Probablemente la seguridad de las cosas familiares es lo que nos hace buscar «igualdades» o similitudes y, naturalmente, el lenguaje es una «representación de similitudes» fundamental. «Pájaro», «piedra», «feliz», «correr», son palabras que representan clases de fenómenos similares y, en este sentido, explicar es tan universal como el lenguaje.

Puede parecer que el mero hecho de asignar una etiqueta a algo no es digno de ser llamado explicar, pero unos cuantos ejemplos no matemáticos pueden ayudar: «El fútbol profesional es espectáculo», «un enseñante es un policía», «la religión es el opio del pueblo». Todas estas frases establecen conexiones entre fenómenos diferentes, explicando así aspectos de esos fenómenos. Hay que admitir que las explicaciones son breves y muy poco detalladas, y que están muy basadas en la experiencia del lector o en su capacidad para imaginar experiencias. (¡Es probable que el lector nunca haya probado el opio, pero sabe lo que significa y la explicación no es menos significativa por esta falta de experiencia directa!) Por lo tanto, en un nivel de explicación elemental, los sustantivos, los adjetivos, los verbos y los adverbios de los lenguajes, y las frases que vinculan entre sí, nos ayudan en nuestra búsqueda de «unidad que subyace a la aparente diversidad».

Pero, si bien clasificar es una actividad universal, las clasificaciones que se obtienen no lo son. La diversidad de los lenguajes conlleva una diversidad de clasificaciones. Para empezar, la estructura de las palabras es diferente: por ejemplo, Harris (1980) cita unos verbos en warlpiri (un lenguaje aborigen australiano) que indican la dirección de la acción en relación con el hablante:

Parukami — correr.
Parukami*rni* — correr acercándose al hablante.
Parukami*rra* — correr alejándose del hablante.
Parakami*mpa* — correr *de un lado a otro* del hablante.

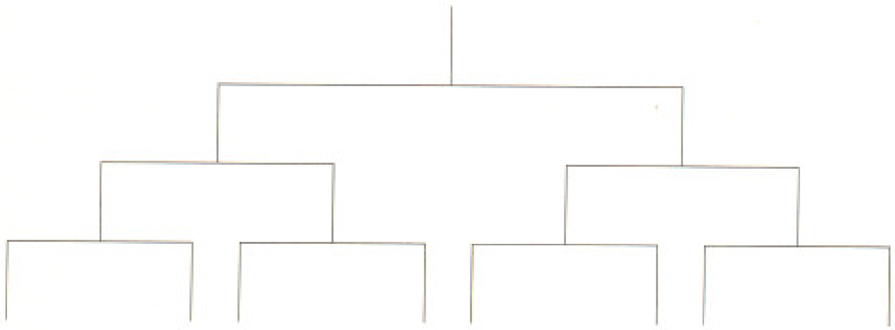


Figura 4

Además, también difiere la estructura de las clasificaciones. Lancy (1983) presenta un exhaustivo trabajo llevado a cabo en Papúa-Nueva Guinea sobre los sistemas de clasificación en el que aparece una gama enorme de tipos y niveles de clasificación. En un apartado del libro, el autor se centra en la idea de clasificación jerárquica, que es la forma estándar en las culturas «occidentales», mediante la cual unos términos «primitivos» se subsumen bajo unos conceptos más generales que, a su vez, también se subsumen bajo unos conceptos aún más generales. Esto produce la típica «representación en árbol» de una taxonomía jerárquica tan conocida en la ciencia y las matemáticas (figura 4).

Lancy discute si la taxonomía es un fenómeno universal y dice: «Mientras que la taxonomía es indudablemente importante en sociedades complejas, no es el único modo —ni siquiera el preferido— de representar y procesar información para el ser humano. De la misma manera que las sociedades pueden renunciar a la cuantificación, creemos que pueden renunciar, y de hecho renuncian, a la jerarquización» (pág. 115). Lancy cita ejemplos de otros tipos de clasificación en apoyo de esta conjetura. Por ejemplo, encontró lo que él llamó una «clasificación por aristas» que permitía al hablante «desplazarse a lo largo de las conexiones en vez de hacia arriba o hacia abajo en una taxonomía jerárquica» (figura 5).

Esto conduce a lo que Lancy denomina una preferencia por «emparejar» en vez de «taxonomizar»: «cielo y tierra, sol y luna, noche y día».

> Parece que podemos decir, sin temor a equivocarnos, que siempre que los melpa desean generalizar o crear una categoría, no lo hacen empleando un solo lexema de orden superior, sino especificando una pareja que, mediante el contraste o la complementariedad entre los miembros de las dos mitades, constituye una totalidad (pág. 166).[10]

10. Naturalmente, esta noción es parecida a la de yin y yang en la China antigua. Véanse más detalles en Ronan (1981).

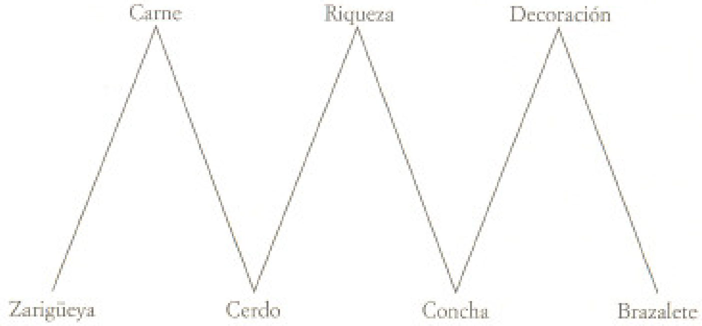


Figura 5

Como ejemplo de otra diferencia de clasificación, Philp (1973) cita una comunicación personal de Kelly que incluye esta vívida ilustración acerca del pueblo melpa: «Por ejemplo, "arma" es... lo que se ha diseñado específicamente para matar hombres o animales (es decir, arcos, flechas y lanzas). Una "piedra" no puede ser un "arma" aunque se utilice para abrirle la cabeza a alguien (es el medio más empleado para cometer homicidios en Hagen). "Una piedra es una piedra es una piedra"» (pág. 173).

Pinxten, al discutir el concepto de espacio de los navajo, también menciona su sistema de clasificación diciendo:

> En contraste con el desarrollo y la estructura de carácter jerárquico y perfectamente regular que caracteriza la conceptualización occidental del espacio, el espacio navajo parece fundamentarse, por lo menos, en tres nociones «básicas» igualmente importantes... ninguna de ellas es realmente «primitiva» en el sentido en que lo son las nociones occidentales: es evidente que por sí mismas son compuestas y que están formadas por nociones espaciales; se «codeterminan» mutuamente. De ahí que muestren cierto carácter circular (pág. 161).

Es interesante ver a investigadores como Lancy, Philp, Kelly y Pinxten esforzarse por comprender la manera de clasificar de otra cultura, y ello quizá nos muestra lo fundamental que es la clasificación para el conocimiento de una cultura. Refleja el hecho de que, mientras cada una de las otro cinco actividades permite que una cultura pueda «tomar» y adoptar términos y nociones de otras culturas (un nuevo juego, una nueva palabra numérica, un nuevo diseño), las maneras en que se conectan y se relacionan las ideas y los fenómenos dentro del conocimiento de una cultura son mucho más resistentes al cambio. Las ideas nuevas pueden ser relativamente fáciles de «asimilar» en el esquema de una cultura, pero la «acomodación» de los sistemas de clasificación de otra cultura sólo se dará muy de vez en cuando durante el desarrollo de una cultura.

Esta observación es aún más válida cuando consideramos formas más complejas de explicación. Hasta ahora sólo hemos examinado la clasificación que, si bien es fundamental y universal, sólo representa un tipo sencillo de explicación. ¿Qué ocurre con la explicación de los fenómenos dinámicos, de los procesos de la vida y del discurrir de los acontecimientos?

En este caso, la representación fundamental y universal es el «relato». Cada cultura tiene sus relatos, sus cuentos populares y sus narradores, y la frase «Érase una vez...» se conoce en todas partes, aunque los términos precisos sean diferentes. Naturalmente, los relatos son empleados por las culturas por más razones que la explicación. Desempeñan unas poderosas funciones sociales, constituyen el «pegamento» histórico de una cultura y, especialmente en las culturas orales, representan la acumulación del conocimiento y la sabiduría de una cultura. Se convierten en «cuentos populares» y están bien documentados en la literatura antropológica (véase, por ejemplo, Vansina, 1985).

La narración de relatos también puede ser una situación divertida, parecida a un juego, y en este contexto las historias se suelen exagerar o incluso llenar de elementos extraños, y dan la oportunidad a los narradores y a su auditorio de participar en la construcción de fantasías. Los relatos pueden ser moralizadores y tener un «mensaje», y los narradores de estos relatos pueden llegar a ser venerados e incluso recibir privilegios especiales como los «hombres sabios», los «ancianos», los «jueces» o los «filósofos».

Naturalmente, la escala de tiempo también puede ser mucha más larga y la narración se convierte en historia. «Érase una vez...» se convierte en «En el principio era el verbo...» Los sucesos de mucho tiempo atrás se envuelven en el misterio, y el crecimiento del misticismo, los mitos, las leyendas y las creencias religiosas se puede encontrar en todas partes. Los relatos también pueden ser predictivos y, por ejemplo, la interpretación de los sueños se puede convertir en una forma de explicación muy sofisticada. La persona que interpreta los sueños puede llegar a ocupar un lugar muy importante en una cultura, sobre todo si estas interpretaciones también tienen una función predictiva.

Por lo tanto, el «relato» es un fenómeno universal cuyo lenguaje presenta un aspecto interesante desde el punto de vista del desarrollo de ideas matemáticas: su capacidad para conectar el discurso de maneras ricas y variadas. Desde el punto de vista de la investigación, se ha dedicado mucha atención a los «conectores lógicos» de un lenguaje que permiten combinar proposiciones y oponerlas, extenderlas, restringirlas, ejemplificarlas, desarrollarlas, etc.

Los lenguajes indoeuropeos poseen ricos conjuntos de conectores lógicos y, en inglés, la obra definitiva fue realizada por Gardner (1977), que consiguió elaborar 1.000 ítem para cuestionarios para comprobar la comprensión de unos 800 conectores diferentes. Strevens (1972) también muestra que hay muchos otros tipos de palabras lógico-gramaticales en el inglés, como se muestra en la tabla 2.

Es evidente que, desde el punto de vista de la riqueza de expresión, el idioma inglés, como otros idiomas del grupo indoeuropeo, parece casi obse-

TABLA 2. ALGUNAS CLASES DE ELEMENTOS LÓGICO-MATEMÁTICOS

Nota:	Estas categorías son «nocionales»; no se presentan en orden de importancia decreciente; las categorías y las listas no son exhaustivas.
Vinculación y secuencia lógica de ideas:	
	y, además, también, es más, más aún, simultáneamente, por lo tanto;
	aparte de, así como, además de.
Paráfrasis y aposición:	
	igual, de manera similar;
	como si, de la misma manera, de manera parecida.
Causalidad	
	en consecuencia, como, porque, por consiguiente, de ahí que, en cuanto (ha ocurrido algo), puesto que, hasta que, siempre que;
	mientras que, como resultado de, por medio de, debido a , con el fin de, para, se sigue que, dado que, debido a;
	condición necesaria y suficiente.
Oposición o contraste	
	alternativamente, aunque, pero, si, sin embargo, no obstante, con todo, aun así, mientras que;
	a pesar de, independientemente de que, por mucho que, por otra parte;
	condición necesaria pero no suficiente.
Restricción	
	excepto, imposible, ocasionalmente, sólo, trivial, incierto, a menos que;
	sólo si, si y sólo si, sólo cuando.
Hipótesis	
	concluir, confirmar, considerar, deducir, imaginar, inferir, invalidar, refutar, suponer, teóricamente, validar;
	en principio, se sigue que, parecería que.
Investigación	
	¿de qué tamaño?, ¿de qué longitud?, ¿qué cantidad?... etc.;
	¿qué?, ¿cuándo?, ¿cuál?, ¿quién?, ¿por qué?, ¿cómo?
	¿con qué fin?, ¿con qué objetivo?, ¿en qué medida?

sionado con la lógica, con la formación de proposiciones complejas y con enlazar cadenas de proposiciones. Además, como dice Bridgman (1958): «Empieza a parecer que la lógica formal, tal como la conocemos nosotros, es un atributo del grupo de lenguajes indoeuropeos con determinadas características gramaticales».

Sin embargo, aquí es necesario dar un toque de atención. Como ocurría con las taxonomías discutidas anteriormente, no existe ninguna razón para suponer que todos los lenguajes compartirán esta relación con la lógica formal y, en consecuencia, la frase clave de la afirmación de Bridgman es «tal como la conocemos nosotros». Ocurre que otros lenguajes, pertenecientes a otros grupos lingüísticos, tendrán sus propios aspectos gramaticales con sus propias lógicas «tal como las conocen ellos».

Por ejemplo, Gay y Cole observaron el lenguaje de los kpelle desde la perspectiva «occidental» y se centraron en la negación, la conjunción, la disyunción, la implicación y la equivalencia. Encontraron que los kpelle eran capaces de expresarlas todas y que, además, tenían una manera mejor y más precisa de expresar la disyunción. En inglés, la palabra *or* (equivalente a la conjunción disyuntiva «o» del castellano) tiene a la vez un significado inclusivo y excluyente, y esta diferencia en los lenguajes hacía que los sujetos kpelle rindieran bastante mejor que sus homólogos estadounidenses en una prueba experimental centrada en la comprensión de disyunciones.

Por lo tanto, la capacidad del lenguaje para conectar el discurso es un aspecto importante de las explicaciones. Otro aspecto es lo que podríamos llamar el verdadero origen del poder explicativo. Para empezar, consideremos el siguiente ejemplo sobre los kpelle:

> Un estudiante kpelle de secundaria aceptó *todas* las afirmaciones siguientes: a) la Biblia es literalmente verídica, por lo tanto todas las cosas fueron creadas durante los seis días descritos en el Génesis; b) la Biblia es un libro como cualquier otro, escrito por pueblos relativamente primitivos durante un largo período de tiempo y contiene contradicciones y errores; c) todos los seres vivos han evolucionado gradualmente durante millones de años a partir de la materia primigenia; d) un «árbol espíritu» de una aldea cercana, después de ser talado, se recompuso solo y volvió a crecer hasta adquirir un tamaño normal en un solo día. El estudiante había aprendido estas afirmaciones de su pastor fundamentalista, de su curso de secundaria sobre la Biblia, de su curso de zoología y de la aún muy extendida cultura animista. Las aceptaba todas porque todas estaban sancionadas por autoridades a las que creía que debía respetar (Gay y Cole, 1967, pág. 35).

La situación en las que Vansina (1985) denomina «sociedades orales», como la de los kpelle, es que «tienden a tener una noción más simple de la causalidad histórica que niega por completo el cambio gradual. Tienden a contemplar las instituciones y las técnicas como fenómenos unitarios que aparecieron totalmente completos, tal como son en la actualidad... Por lo tanto, la historia se convierte en una sucesión de héroes culturales de mayor o menor importancia» (pág. 131). A pesar de la naturaleza más bien peyorativa de estas declaraciones, es fácil comprender que en culturas orales como ésta las personas sean claramente importantes como autoridades.

Para los musulmanes fundamentalistas el Qur'an (Corán) es la fuente de referencia definitiva para la explicación. Como explica Rahman (1981): «En el islam, la fuente de los estudios matemáticos y de otras ciencias es el concepto de Tojid, la Unidad de Dios. Dios es Uno; de ahí que en la serie de números el número uno sea el símbolo más directo e inteligible del Origen. Y misma la serie de números es una escalera por la que el hombre asciende desde el mundo de la multiplicidad hasta el Uno» (pág. 79).

Cuando trataba de buscar explicaciones para los círculos de piedra y otros artefactos neolíticos, Critchlow (1979) recurrió al chamanismo antiguo como fuente primordial. Como dice este autor: «El chamanismo se ha descrito como una forma superviviente de una religión arcaica. Hasta ahora se ha estudiado en lugares tan distantes como Siberia, Norteamérica y Sudamérica, Indonesia y las islas del Pacífico... Por muy difíciles que sean y fueran el análisis y la comprensión de las técnicas del éxtasis chamanístico para los observadores occidentales, lo que sí destaca como estrictamente determinado es la estructura fundamental de su cosmología: particularmente en el número de "cielos", que son siete o nueve según la perspectiva y la circunstancia» (pág. 51). A continuación, Critchlow explora la importancia de estos números y de esta cosmología para comprender mejor los círculos de piedra neolíticos.

Para los chinos de la antigüedad, la fuente explicativa era diferente. Ronan (1981) nos cuenta que «no se creía en la idea de una deidad creadora y, por lo tanto, en un hacedor supremo; esto, combinado con la convicción de que el universo entero era un sistema orgánico autosuficiente, condujo al concepto de un Orden omnímodo en el que no había lugar para la Ley y, en consecuencia, había pocas regularidades en la esfera mundana sobre las que fuera fructífero aplicar una matemática teórica» (pág. 63).

Otro de los sistemas de explicación más importantes era, y es, el que ofrece la astrología. Esta aplicación práctica del estudio astronómico ha sido respaldada y rechazada a lo largo de la historia al entrar en competencia con otros sistemas explicativos. Pero no se puede negar que desde Mesopotamia a la China, desde México a la India, en cada continente, ha habido y todavía hay un fuerte interés en la predicción astrológica.

La astrología se podría considerar como la primera aplicación de la ciencia y ha tenido un profundo efecto en el desarrollo matemático. Ha estimulado el cálculo, la predicción, la creatividad en el desarrollo de calendarios, la búsqueda de pautas y el deseo de controlar fenómenos. Sus relaciones con la numerología y la geomancia son profundas y no se deben desestimar. La astrología no es ciencia y sus verdades no se deben entender como empíricamente verificables. Esta perspectiva solo nos ofrece una gama limitada de interpretaciones de los fenómenos.

Como veremos en el próximo capítulo, la ideología o visión del mundo dominante tiene un profundo efecto en el tipo de explicación aceptable en última instancia en una cultura, y la perspectiva croscultural hace que nos demos cuenta de lo necesario que es mantener la mente lo más abierta posible a las explicaciones de otras culturas. Citando otra vez a Vansina (1985):

> En muchas culturas, la verdad es lo que se repite fielmente como contenido y que ha sido acreditado como cierto por los antepasados. Pero, en ocasiones, la verdad no incluye la noción de que *x* e *y* ocurrieran realmente. Cuando los habitantes de las islas Trobrian (Nueva Guinea) oyen afirmaciones que van en contra de sus ideas cotidianas acerca de las leyes naturales, las palabras de sus antepasados, aunque sean ver-

daderas, deben estar apoyadas por algún indicio del suceso visible en el paisaje. En caso contrario, la tradición es verdadera pero no es factual (pág. 129).

Y, más adelante, dice:

En algunas sociedades estratificadas parece darse una correlación entre la verdad y el rango: cuanto más elevado sea el rango del hablante, más cierto será lo que diga aunque hable del pasado (pág. 130).

¿Cómo debemos interpretar la expresión «más cierto»?

Una vez más, lo que nos interesa son las diferencias entre culturas, pero *no* porque muestren una superioridad cultural simplista, sino porque nos sensibilizan a las similitudes. En este caso, es evidente que «explicar» es universal para el desarrollo cultural y social en general, y para el desarrollo matemático en particular.

Todas las culturas estructuran su lenguaje, todas clasifican, todas tienen relatos explicativos, todas tienen maneras de conectar ideas mediante el discurso y todas tienen una referencia fundamental para validar explicaciones. Explicar es tan universal como el lenguaje y, sin duda, tiene una importancia básica para el desarrollo matemático.

2.9. De los «universales» a los «particulares»

Mi objetivo en los últimos seis apartados ha sido doble; en primer lugar, explorar con la ayuda de las pruebas crosculturales disponibles la hipótesis de que estas seis actividades son «universales» y, en segundo lugar, argumentar qué actividades son, y han sido, importantes para el desarrollo de los aspectos matemáticos de la cultura.

En este punto debería advertir al lector acerca de la palabra «universal». Me encontré por primera vez con esta idea en un artículo de Murdoch (1945) llamado «The Common Denominator of Cultures», ¡un buen título para alguien de educación matemática interesado en la antropología! En este artículo, Murdoch enumera varios «universales culturales» de los que los siguientes pueden ser de interés para nosotros:

Calendario	Reglas de herencia
Cosmología	Bromas
Artes decorativas	Terminología de parentesco
Interpretación de los sueños	Lenguaje
Educación	Leyes
Ética	Numerales
Juegos	Elaboración de utensilios
Gestos	Comercio

Naturalmente, una lista como ésta apoya en parte mis razonamientos de los apartados anteriores, pero no contribuye a *establecer* si estas actividades son realmente universales. Sin duda, el problema es que sólo podemos hacer inferencias a partir de las pruebas disponibles.

También espero que la «plausibilidad» sea un criterio razonable que se pueda emplear aquí para poder argumentar que, por lo menos, es plausible que estas seis actividades sean universales. Sin embargo, es concebible que en algún lugar pueda existir una sociedad remota que no tenga estos elementos en su cultura. De hecho, Denny (1986) sostiene que cazadores como los ojibway y los inuit no tienen ninguna necesidad de pensamiento matemático. Sin embargo, para nuestros fines, esto no devalúa la idea de que estas actividades son aspectos generalizados e importantes de la cultura. De todos modos, quizá una etiqueta más segura sería «universales culturocéntricos», es decir, universales desde *nuestra* posición culturocéntrica, ya que *nosotros* describimos los fenómenos en función de «contar», etc. Por lo tanto, esto deja claro que nunca podemos *establecer* la universalidad de los fenómenos, sino que meramente elegimos describir de una manera determinada un conjunto muy amplio de similitudes. Así pues, y dentro de este contexto de significado, seguiré empleando la palabra «universal» para caracterizar las seis actividades que acabo de describir.[11]

Si realmente *son* universales y si he argumentado con éxito que son actividades *importantes* para el desarrollo de los aspectos matemáticos de la cultura, entonces el corolario debe ser que todas las culturas desarrollan matemáticas: *que las matemáticas son un fenómeno pancultural.*

Además, no puedo argumentar de ninguna manera que las «matemáticas» empezaran en un momento determinado de la historia cultural. En cambio, ahora podemos ver que la *tecnología simbólica* de las matemáticas evoluciona continuamente en todas las culturas y en todas las sociedades como resultado de la realización de estas seis actividades por separado y en interacción.

Desde esta perspectiva, no existen *unas* matemáticas: de hecho, quizá sea adecuado que en inglés, y también en otros idiomas, la palabra «matemáticas» tenga una forma plural. Es evidente que existen diferentes matemáticas: hemos visto muchos sistemas diferentes de numerar y de contar, distintos términos para localizar, distintas medidas, diferentes diseños y tecnologías, juegos diferentes y distintas maneras de explicar. Podemos leer acerca de las matemáticas chinas, las griegas, las romanas, las africanas, las islámicas, las indias y las neolíticas, por citar sólo unas cuantas (véanse, por ejemplo, Ronan, 1986; Ronan, 1983; Nasr, 1976; Heath, 1921; Critchlow, 1979; Zaslavsky, 1973).[12]

11. Saunders MacLane llevó a cabo un análisis similar en su artículo publicado en *American Mathematical Monthly* en 1981.

12. Sin embargo, Freudenthal me ha recordado que el «cuadrivio de las artes matemáticas» de la antigua tradición pitagórica estaba formado por la aritmética, la geometría, la música y la astronomía (Freudenthal, 1973, pág. 80). Eran las cuatro matemáticas «originales», en plural. El constructo más pertinente para las ideas de este capítulo es la «etnomatemática» (d'Ambrosio, 1985b).

Pero ya oigo el comentario de los escépticos: después de todo, tenemos esta disciplina unificada a la que llamamos «Matemáticas», ¿no es así? Menos por menos es más, estemos donde estemos, y en todos los triángulos la suma de los ángulos internos es de 180 grados, ¿no es así? Por desgracia, este razonamiento confunde «el carácter universal de las verdades Matemáticas» con su base cultural: verdades Matemáticas como éstas son válidas independientemente del contexto geográfico, pero esto no niega las raíces culturales de esas verdades. ¿Por qué tenemos números negativos y positivos? ¿Por qué son 180 grados y no 200?

¿Cómo podemos explicar la existencia de esta disciplina llamada «Matemáticas» que todos parecemos reconocer?

Hasta ahora hemos examinado la cultura y los grupos culturales como entidades discretas y separadas, y hemos ignorado el contacto cultural o, en realidad, el conflicto entre culturas. No es una casualidad que, para comprender las matemáticas como fenómeno cultural, haya sido necesario examinar algunos estudios centrados en grupos de personas que han sido relativamente poco contamidados por la cultura «occidental». Se trata de situaciones donde «otras» culturas han seguido floreciendo, en algunos casos a pesar de esfuerzos a gran escala destinados a extinguirlas. El contacto y el conflicto entre culturas contribuye mucho a reducir la diversidad cultural y Papúa-Nueva Guinea es un ejemplo excelente. El interior del país estaba relativamente poco contaminado hasta este siglo y, como resultado, los antropólogos han descubierto más de 750 idiomas diferentes y, como ya indiqué antes, Lean, de la University of Technology en Lae, posee datos acerca de más de 500 sistemas de contar diferentes. Pero Lean ya es consciente de que estos sistemas van desapareciendo a medida que los pueblos van asimilando la cultura occidental. Tras unas cuantas generaciones de conflicto entre culturas, es probable que la inmensa diversidad cultural de Papúa-Nueva Guinea desaparezca. Es casi seguro que las tres «armas» empleadas en este conflicto —comercio, religión y educación— acabarán siendo irresistibles, como ha ocurrido en otros países. Por fortuna, antes de que esto suceda, esta diversidad se está documentando y ello nos permite reconocer ciertas diferencias y similitudes.

Por lo tanto, el contacto entre culturas tiene su vertiente negativa porque algunas culturas pueden dominar, y han dominado, a otras. No examinaremos aquí los detalles de este proceso, aunque es evidente que intervienen las tres «armas» antes mencionadas, junto con otra más, «la guerra», que seguramente ha eliminado muchas culturas en la historia de la humanidad.

Sin embargo, sería erróneo considerar el contacto entre culturas como un fenómeno totalmente negativo. Independientemente de cómo se produzca el proceso, el contacto entre culturas también ha estimulado el crecimiento cultural. Desde la perspectiva particular de este libro, el crecimiento de las Matemáticas (entendida como la disciplina internacionalizada que conocemos nosotros) es el resultado de desarrollos producidos tanto dentro de las culturas como entre ellas. Las Matemáticas (con «M» mayúscula tal como me estoy refiriendo a ellas) ciertamente no son el producto de *una* cultura, ni el resultado de las actividades de un grupo cultural. Tienen un pasado verdaderamente multicultural que autores como Kline, Wilder y otros han tratado de documentar. Por lo tanto, las Matemáticas no son simplemente un subconjunto de todas las matemáticas que han desarrollado las distintas culturas: es una línea particular de desarrollo del conocimiento que ha sido cultivada por determinados grupos culturales hasta alcanzar la forma concreta que conocemos hoy.

Aunque las simbolizaciones y los conceptos de las Matemáticas se han desarrollado y han crecido de determinadas maneras, las seis actividades mencionadas todavía se pueden distinguir. Contar, localizar, medir y diseñar han sido, y todavía son, las bases de la ciencia, la ingeniería, la industria, el comercio, la agricultura, la guerra, etc. Los números y los sistemas numéricos se han hecho más complejos: infinitamente grandes, infinitamente pequeños, infinitamente divisibles, nuevos «números» como vectores y matrices, operaciones con todos ellos, con análisis de todos los sistemas numéricos y algebraicos posibles. Localizar nos ha dado gran parte de nuestra geometría: líneas y ángulos, ejes, coordenadas cartesianas y esféricas, gráficas, teoría de grafos, etc.

Medir siempre ha estado en el núcleo del empleo de las matemáticas por parte de la ciencia: más y más precisión, fenómenos extremadamente grandes, fenómenos extremadamente pequeños, desarrollo de sistemas de medida y teorías de medida, aproximación, estimación, medios probabilísticos y estadísticos para manejar números grandes, etc. Diseñar aún se encuentra en el núcleo del desarrollo tecnológico: no sólo en las formas geométricas, sino en el diseño de todo tipo de cosas, desde flujos de tráfico a sistemas informáticos y lanzaderas espaciales. En las sociedades técnicamente avanzadas, la mayor parte del entorno está diseñado y fabricado. Incluso el entorno natural como los bosques y los lagos se somete cada vez más a exigencias de diseño.

Las otras dos actividades también han sido, y continúan siendo, muy importantes. Sin duda, jugar es una cuestión muy seria porque los juegos no sólo modelizan la realidad con fines experimentales, sino también con fines educativos. Gran parte de la vida moderna ha sido analizada por expertos de las teorías del juego, y la idea de «juego» es fundamental para comprender la interacción social (naturalmente, ¡jugar aún puede ser algo divertido!).

Por último, explicar se ha convertido en una actividad completamente refinada y sofisticada. Ya he mencionado el estudio de Gardner mostrando nuestra obsesión con la lógica de las explicaciones, que alcanza su culminación con la demostración: la forma clásica de explicación Matemática. La demostración explica preguntas del tipo, «¿Por qué ocurre que...?» ofreciendo una serie de afirmaciones vinculadas mediante conectores lógicos adecuados. Naturalmente, las Matemáticas también explican proporcionando modelos y estructuras conceptuales de fenómenos externos a su sistema simbólico. De hecho, las Matemáticas han crecido hasta convertirse en un medio de explicación muy especial y potente.

Además, esta línea de desarrollo Matemático se puede identificar en sociedades que se caracterizan por estar cada vez más centradas en la tecnología. Tanto la documentación histórica como la antropológica apuntan en esta dirección. La imagen que obtenemos es la de una interrelación continua entre seres humanos que crean la tecnología para tener más control sobre su entorno; después, la tecnología llega a formar parte de este entorno y, en consecuencia, requiere la invención y creación de más tecnología. Esto no sólo es cierto para la tecnología física de los instrumentos, los artefactos y los utensilios: también se aplica a tecnologías simbólicas como el lenguaje y las matemáticas. Tanto el lenguaje como las matemáticas evolucionan continuamente, no sólo mediante lo que podríamos denominar desarrollo «interno», sino también a causa de la presión del entorno, tanto físico como social.

El vínculo Matemático con un entorno cada vez más tecnológico es evidente. Como dice Marshal Stone, «cada vez se reconoce con mayor claridad que la enseñanza de las matemáticas es el verdadero fundamento de la sociedad tecnológica cuya creación es el destino de nuestros tiempos» (pág. 18). El punto de vista de Stenhouse (véase el primer capítulo) acerca de «las demandas del entorno material» también es pertinente aquí. En las sociedades modernas de hoy, el entorno material es cada vez más artificial. Según Lancy (1983), «sólo en una época comparativamente reciente la diversidad de los artefactos producidos por el hombre ha igualado, y hasta ha llegado a eclipsar, la diversidad de la naturaleza» (pág. 202). Sin duda esto es cierto, casi por definición, para los habitantes de zonas urbanas, pero también es cada vez más cierto para los habitantes de zonas rurales en virtud del enfoque tecnológico del hombre sobre la agricultura y el entorno en general. Es indudable que para muchos niños del mundo moderno el entorno será, en esencia, más artificial que natural. Esta influencia del entorno hecho por el hombre aumenta aún más cuando tenemos en cuenta las muchas y variadas instituciones sociales existentes y que también son obra del hombre.

Naturalmente, ahora es necesario añadir un nuevo fenómeno al entorno: el ordenador. Producto de las matemáticas y de los matemáticos, esta máquina omnipresente se ha introducido, y tiene gran influencia, en muchas de nuestras instituciones materiales y sociales. Vivimos en la era de las tecnologías de la información, y las Matemáticas, por medio del ordenador, controlan muchos más aspectos de nuestra existencia. El ordenador nos permite controlar más y más nuestro entorno y, al mismo tiempo, también controla cada vez más *nuestras* actividades.

Como hubiera dicho White, esta tecnología influye cada vez más en nuestras filosofías e ideologías (véase Weizenbaum, 1976) y tiene unos profundos efectos en nuestras instituciones sociales. Muchas de estas influencias son positivas (como mejorar la capacidad de comunicación de jóvenes mental y físicamente discapacitados), aunque otras son percibidas como potencialmente peligrosas (como los bancos de datos sobre los ciudadanos). La analogía informática del cerebro ejerce una gran influencia en la investigación cognitiva y en nuestras imágenes del pensamiento; y las posibilidades de almacenamiento, recuperación y análisis de la información ofrecen soluciones potenciales a problemas todavía inimaginables.

Además, la nueva tecnología es una potente fuerza impulsora para las Matemáticas: «En la sociedad actual, la tecnología influye en el desarrollo de las matemáticas o bien directamente, planteando al experto problemas técnicos susceptibles de tratamiento matemático, o bien indirectamente, mediante la física, la química y otras ciencias naturales» (Struik, 1963). Igualmente importante es el creciente interés en los métodos algorítmicos.

De nuevo vemos que el enfoque de White a la evolución de la cultura y el análisis que hace de la misma son muy pertinentes, porque nos indican claramente la importancia del entorno en la evolución de la «tecnología matemática» de nuestra cultura. A medida que nuestro entorno se hace más complejo, esta cultura responde desarrollando más maneras de manejarlo. Naturalmente, a medida que desarrollamos más «maneras», éstas se van subsumiendo en el «entorno» y el proceso de desarrollo cultural continúa.

2.10. Resumen

He argumentado la propuesta de que existen seis actividades «universales» esenciales que constituyen el fundamento para el desarrollo de las matemáticas en la cultura. También he mostrado que todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas, como respuesta a las «demandas» del entorno experimentadas a través de estas actividades. Sin embargo, como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre culturas diferentes, ha aparecido una línea de desarrollo concreta e identificable. Esto ha dado lugar a las Matemáticas, la disciplina internacionalizada que conocemos hoy, una versión muy potente de las matemáticas en la cultura. El impulso principal en el crecimiento de estas Matemáticas procede de un entorno cada vez más centrado en la tecnología: con esto quiero decir que la mayoría de nosotros vivimos en sociedades cada vez más diseñadas y que dependen cada vez más del desarrollo tecnológico. De hecho, podríamos decir que la sociedad industrializada moderna se basa en una cultura Matemático-tecnológica.

Por lo tanto, lo que también está cada vez más claro es que las Matemáticas, además de ser una clase determinada de tecnología simbólica, también es portadora, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados. Si sólo pretendemos comprender las Matemáticas como una tecnología simbólica concreta, únicamente comprenderemos una pequeña parte de ella: de hecho, quizá la parte menos importante para la educación y para nuestro futuro. Así pues, pasemos a analizar los valores de las Matemáticas para ver qué implicaciones tienen para la educación matemática.

7.5.2. *La comunidad de Educación Matemática crítica*

El otro papel importante de los Educadores Matemáticos consiste en proporcionar el contexto social para reflexionar sobre la enculturación Matemática y en estimular la crítica, la investigación, el análisis y el desarrollo. El tremendo crecimiento en investigación y desarrollo de la Educación Matemática durante los últimos años se puede atribuir al creciente reconocimiento de la importancia de esta actitud crítica y al deseo de buscar mejores maneras de educar a nuestros hijos.

La comunidad de la Educación Matemática debería acoger y estimular la crítica, el análisis, la reflexión y el debate sobre todos los aspectos de la enculturación Matemática, como tributo a la «apertura». Mediante su papel como «analista» y «conservadora» de la cultura, esta comunidad ayuda a estimular la producción de ideas sobre la misma cultura Matemática y, en consecuencia, ayuda a desarrollar la cultura. Este libro es un ejemplo de lo que quiero decir y, por lo tanto, no es ninguna coincidencia que esté escrito por alguien que está profundamente integrado en la comunidad de la Educación Matemática y que siente que los valores de la cultura Matemática se están perdiendo de vista al satisfacer las otras exigencias educativas de la sociedad de hoy.[8]

Así pues, éste es el contexto social actual en el que se debe socializar a los nuevos enseñantes de Matemáticas. Como ocurre con cualquier grupo profesional, los miembros de más edad y más experimentados desempeñarán un importante papel en la socialización de los recién llegados. Los enseñantes experimentados siempre han socializado a los nuevos enseñantes en el cumplimiento de su papel y esta tendencia no va a desaparecer. La perspectiva de la enculturación nos indica que ahora la socialización del recién llegado en el papel de Enculturador Matemático es responsabilidad de un grupo mucho más amplio que los enseñantes experimentados de Matemáticas. Además, a causa de la creciente complejidad de la «profesión» de la enculturación, ahora ya ha dejado de ser adecuado pensar que los nuevos enseñantes se deben socializar, simplemente, en el papel de «enseñantes de clase».

El nuevo Enculturador Matemático está siendo socializado en un grupo mucho más amplio y, en consecuencia, puede desarrollar una influencia profesional que va mucho más allá de los límites de su clase y de su escuela. (Por ejemplo, el muy influyente Cockcroft Committee, que examinaba el estado de la Educación Matemática en el Reino Unido, estaba formado por varios enseñantes de Matemática y muchas propuestas presentadas a esta comisión las formularon varios grupos de enseñantes. También podemos encontrar ejemplos en otros países.) Por lo tanto, la comunidad actual de la Educación Matemática ofrece un contexto social para iniciar al recién llegado en un papel cuya influencia llega mucho más allá de lo que era posible, o incluso imaginable, hace cincuenta años. ¿Podemos aceptar también la responsabilidad de emplear esta influencia sabiamente?

8. Aunque los otros libros de esta colección Kluwer se dedican a otros objetivos concretos, contribuyen de manera similar al desarrollo de la cultura Matemática.

APÉNDICE: INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS

Algunas notas que os ayudarán en este tipo de trabajo.

a) Presentad el problema con vuestras propias palabras.
b) Explicad cómo trataréis de resolver el problema o cómo vais a investigar la situación.
c) Probad el método. Mostrad *todo* lo que hacéis.
d) Reunid los resultados de vuestro trabajo. Tabulad los resultados siempre que sea posible (es decir, colocad los resultados en una tabla de una manera lógica).
e) Examinad los resultados para ver si encontráis alguna regla o pauta. Si creéis haber encontrado alguna, decid cuál es. A continuación, probad la regla aplicándola a unos datos nuevos para ver si aún funciona o si la pauta se sigue produciendo.
f) Expresad las conclusiones que creéis que se derivan de vuestro trabajo.
g) Si el método no funciona, tratad de hallar otro método y empezad otra vez. ¡Los matemáticos lo tienen que hacer con frecuencia!
Se debe pedir ayuda si hace falta.
h) Tratad de añadir por vuestra cuenta algo original al problema; por ejemplo, ampliad el problema, investigad un poco el tema, modificad el problema ligeramente, cread nuevas reglas, escribid algo sobre vuestra investigación, leed sobre el trabajo realizado por los matemáticos en este tema, etc.

Cuando hagáis la versión final de vuestro trabajo, tened presente lo siguiente:

a) Elegid el tipo de papel adecuado para vuestro trabajo (pautado, liso, cuadriculado, isométrico, punteado para gráficas, etc.).

b) Ilustrad vuestro trabajo con diagramas, bosquejos, gráficas, mapas, etc., *siempre y cuando ayuden a aclarar más las cosas.*
c) Emplead lápices o rotuladores de colores sólo si ayudan de verdad; en ocasiones, los colores confunden.
d) No escribáis «ensayos»: usad el formato de anotación (esta nota es un ejemplo). Sed precisos; escribid con frases cortas siempre que sea posible.
e) No hagáis afirmaciones ni saquéis conclusiones que no hayáis comprobado o que no se deriven de vuestro trabajo.

De *A.T.M.* (1980).

BIBLIOGRAFÍA

Al-Daffa', A. A., *The Muslim contribution to Mathematics,* Croom Helm, Londres, 1977.

Al-Faruqi, I. R. y Nasseef, A. D., *Social and Natural Sciences: The Islamic Perspective,* Hodder and Stoughton, Londres, y King Abdulaziz University, Jeddah, 1981.

Ascher, M., «Mathematical Ideas in Non-Western Societies», *Historia Mathematica* nº 11, págs. 76-80, 1984.

Ascher, M. y Ascher, R., *Code of the Quipu,* University of Michigan Press, 1981.

A. T. M., *Mathematical Investigations in the Classroom,* Association of Teachers of Mathematics, Derby, 1980.

A. T. M., *Getting Started with Coursework,* Association of Teachers of Mathematics, Derby, 1987.

Baker, R. R., *Human Navigation and the Sixth Sense,* Hodder and Stoughton, Londres, 1981.

Banwell, C., Saunders, K. y Tahta, D., *Starting Points,* Tarquin Publications, Norfolk, Reino Unido, 1972.

Barnes, D. y Todd, F., *Communication and Learning in Small Groups,* Routledge and Kegan Paul, Londres, 1977.

Bateson, G., *Steps to an Ecology of Mind,* Ballantine, Nueva York, 1972.

Battersby, A., *Mathematics in Management,* Penguin, Londres, 1966.

Bell, A. W., «A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations», *Educational Studies in Mathematics,* nº 7, págs. 23-40, 1976.

Bell, E. T., *Men of Mathematics,* Simon and Schuster, Nueva York, 1937.

Bender, P. y Schreiber, A., «The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching», *Educational Studies in Mathematics,* nº 11, págs. 59-90, 1980.

Berger, P. L. y Luckman, T., *The Social Construction of Reality: a treatise on the sociology of knowledge,* Penguin, Harmondsworth, 1979 (trad. cast.: *La construcción social de la realidad,* Madrid, Martínez Murguía, 1986).

Bernstein, B., «On the classification and framing of educational knowledge», en M. F. D. Young (comp.) *Knowledge and Control,* Collier-Macmillan, Londres, 1971.
Berry, J. W., Human *Ecology and Cognitive Style,* Halstead Press Division, John Wiley and Sons, Nueva York, 1976.
Biersack, A., comunicación personal del Dept. de Antropología, Universidad de Michigan, 1978.
Bishop, A. J., «Decision-making, the Intervening Variable», *Educational Studies in Mathematics*, n° 7, págs. 41-47, 1976.
Bishop, A. J., «Visualising and Mathematics in a Pre-Technological Culture», *Educational Studies in Mathematics,* n° 10, págs. 135-146, 1979.
Bishop, A. J., «Implications of Research for Mathematics Teacher Education», *Journal for Education in Teaching*, n° 8, págs. 118-135, 1982.
Bishop, A. J., «The Social Psychology of Mathematics Education», en L. Streefland (comp.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Noordwijkerhout, Holanda, 1985.
Bishop, A. J. y Nickson, M., *Research on the Social Context of Mathematics Education,* NFER-Nelson, Slough, 1983.
Bishop, A. J. y Goffree, F., «Classroom Organisation and Dynamics», en B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (comps.), *Perspectives on Mathematics Education,* Reidel, Dordrecht, 1986.
Bloor, D., *Knowledge and Social Imagery,* Routledge and Kegan Paul, Londres, 1976 (trad. cast.: *Conocimiento e imaginario social*, Barcelona, Gedisa, 1998).
Bloor, D., *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge,* Macmillan, Londres, 1983.
Bolt, B., *Mathematical Activities: A Resource Book for Teachers,* Cambridge University Press, 1982 (trad. cast.: *Actividades matemáticas*, Cerdanyola, Labor, 1989).
Booth, L. R., «Child-methods in Secondary Mathematics», *Educational Studies in Mathematics,* n° 12, págs. 29-41.
Bos, H. J. M. y Mehrtens, H., «The Interactions of Mathematics and Society in History: Some Exploratory Remarks», *Historia Mathematica*, n° 4, págs. 7-30, 1977.
Bourdieu, P., «Cultural Reproduction and Social Reproduction», en J. Karabel y A. H. Halsey (comps.), *Power and Ideology in Education,* Oxford University Press, 1977.
Bourgoin, J., *Arabic Geometrical Pattern and Design,* Dover, Nueva York, 1973.
Bridgman, P. W., «Quo Vadis», *Daedalus*, n° 87, págs. 85-93, 1958.
Brousseau, G., «Problèmes de Didactique des Décimaux», *Recherches en Didactique des Mathematiques,* n° 2, págs. 37-125, 1981.
Bruner, J. S., «The Course of Cognitive Growth», *American Psychologist,* n° 19, págs. 1-15, 1964.
Burgess, B., *Adding an Historical Perspective to "A" Level Mathematics,* The Belfast Teachers' Centre at Queen's University, Irlanda del Norte, 1986.

Burkhardt, H., *The Real World and Mathematics*, Blackie, Glasgow, 1981.
Buxton, L., *Do You Panic about Maths: Coping with Maths Anxiety*, Heinemann Educational, Londres, 1981.
Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D., «Mathematics in the Streets and in Schools», *British Journal of Developmental Psychology*, n° 3, págs. 21-29, 1985.
C. A. T. E. (Council for the Accreditation of Teacher Education), *Teaching Quality,* H. M. S. O., Londres, 1983.
Christiansen, B., Howson A. G. y Otte, M., *Perspectives on Mathematics Education,* Mathematics Education Library, Reidel, Dordrecht, 1986.
Closs, M. P. (comp.), *Native American Mathematics,* University of Texas Press, Austin, Texas, 1986.
Cobb, P., «Concrete Can Be Abstract: A Case Study», *Educational Studies in Mathematics,* n° 17, págs. 37-48, 1986.
Cole, M. y Bruner, J. S., «Cultural Differences and Inferences about Psychological Processes», *American Psychologist*, n° 26, págs. 867-876, 1971.
Cole, M. y Scribner, S., *Culture and Thought,* Wiley, Nueva York, 1974.
Critchlow, K., *Time Stands Still*, Gordon Fraser, Londres, 1979.
Crowe, M. J., «Ten "Laws" Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics», *Historia Mathematica,* n° 2, págs. 161-166, 1975.
Dahrendorf, R., «Towards the Hegemony of Post-modern Values», *New Society,* 15 de noviembre, págs. 360-362, 1979.
D'Ambrosio, U., *Socio-cultural Bases for Mathematics Education,* Unicamp, Campinas, Brasil, 1985a.
D'Ambrosio, U., «Ethno Mathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics», *For the Learning of Mathematics* n° 5, febrero, págs. 44-48, 1985b.
Damerow, P., «Individual Development and Cultural Evolution of Arithmetical Thinking», en S. Strauss, *Ontogeny and Historical Development,* Norwood, Pennsylvania, 196.
Damerow, P. y otros (comps.), *Mathematics for All,* Unesco, 1984.
Davies, I., «Knowledge, Education and Power», en R. Brown (comp.), *Knowledge, Education and Cultural Change,* Tavistock, Londres, 1973.
Davis, P. J. y Hersh, R., *The Mathematical Experience,* Birkhauser, Boston, 1981.
Davis, R. B., *A Modern Mathematics Program* (The Madison Project), Coop. Research Project D-093, Syracuse University y Webster College, San Luis, 1965.
Davis, R. B., Brousseau, G. y Werner, T., «Observing students at work», en B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (comps.), *Perspectives on Mathematics Education,* Reidel, Dordrecht, 1986.
Dawe, L. C. S., «The Impact of Culture in the Mathematics Classrooms of Multicultural Australia», en *Cultural Dynamics,* en prensa, 1988.
Denny, J. P., «Cultural Ecology of Mathematics: Ojibway and Inuit Hunters», en Closs M. P., *Native American Mathematics,* University of Texas Press, Austin, Texas, 1986.

Dewey, J., *Democracy and Education,* Macmillan, Nueva York, 1916 (trad. cast.: *Democracia y educación*, Madrid, Morata, 1998).

Dieudonné, J., «New Thinking in School Mathematics», en *New Thinking in School Mathematics,* Organización para la Cooperación Económica Europea, París, 1961.

Doczi, G., *The Power of Limits,* Shambhala, Boulder y Londres, 1981.

Dubreil-Jacotin, M. L., «Women Mathematicians», en F. LeLionnais, traducción de H. G. Bergman, *Great Currents of Mathematical Thought,* Dover, Nueva York, 1971.

Durban, P. T. y Rapp, F. (comps.), *Philosophy and Technology,* Reidel, Dordrecht, 1983.

Ellert, H., *The Material Culture of Zimbabwe,* Longman, Londres, 1984.

Ellul, J., *The Technological System,* Continuum Publishing, Nueva York, 1980.

Entwistle, H., *Class, Culture and Education,* Methuen, Londres, 1977.

Eshiwani, G., «Mathematics in Society», en Ministerio de Educación, Swazilandia, *The Development of Teaching Materials for School Mathematics,* British Council, Londres, 1979.

Faegre, T., *Tents: Architecture of the Nomads,* John Murray, Londres, 1979.

Falkener, E., *Games Ancient and Oriental – How to Play Them,* Dover, Nueva York, 1961.

Farnham, D., «Language and Mathematical Understanding», *Recognitions*, ejemplar especial, nº 3, Association of Teachers of Mathematics, Derby, 1975.

Fasheh, M., «Mathematics, Culture and Authority», *For the Learning of Mathematics*, nº 3, págs. 2-8, 1982.

Fischbein, E., *Intuition in Science and Mathematics – An Educational Approach,* Reidel, Dordrecht, 1987.

Fitzgerald, A., *Mathematics in Employment (16-18),* University of Bath, School of Mathematics, 1981.

Fox, L. H., Brody, L. y Tobin, D., *Women and the Mathematical Mystique,* John Hopkins University Press, Baltimore, 1980.

Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task,* Reidel, Dordrecht, 1973.

Freudenthal, H., *Weeding and Sowing,* Reidel, Dordrecht, 1978.

Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Reidel, Dordrecht, 1983.

Gardner, P. L., *Logical Connectives in Science,* Monash University, Faculty of Education, Melbourne, Australia, 1977.

Gay, J. y Cole, M., *The New Mathematics in an Old Culture,* Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1967.

Gerdes, P., «Conditions and Strategies for Emancipatory Mathematics Education in Underdeveloped Countries», *For the Learning of Mathematics*, nº 5, págs. 15-20, 1985.

Gerdes, P., «How to Recognise Hidden Geometrical Thinking: A Contribution to the Development of Anthropological Mathematics», *For the Learning of Mathematics*, nº 6, págs. 10-17, 1986.

Gilbert, P. G. S. y Lovegrove, M. N., *Science Education in Africa,* Heinemann, Londres, 1972.

Goffree, F., «Primary Teacher Training: A Reflective Approach», *Mathematical Education for Teaching*, nº 4, págs. 2-7, 1981.

Gordon, M., «Conflict and Liberation: Personal Aspects of the Mathematics Experience», *Curriculum Inquiry,* nº 8, págs. 251-271, 1978.

Greenfield, P. M. y Bruner, J. S., «Culture and Cognitive Growth», en D. A. Goslin (comp.), *Handbook of Socialisation Theory and Research,* Rand McNally, Nueva York, 1966.

Griffiths, H. B. y Howson, A. G., *Mathematics, Society and Curricula,* Cambridge University Press, 1974.

Habermas, J., *Toward a Rational Society,* Heinemann, Londres, 1971.

Hadamard, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field,* Dover, Londres, 1945.

Hallpike, C. R., *The Foundations of Primitive Thought,* Clarendon Press, Oxford, 1979.

Hardy, J., «Textbooks and Classroom Knowledge: The Politics of Explanation and Description», en G. Whitty y M. F. D. Young (comps.), *Explorations in the Politics of School Knowledge,* Nafferton, Londres, 1976.

Harris, P., *Measurement in Tribal Aboriginal Communities,* Northern Territory Department of Education, Australia, 1980.

Harris, P, *Teaching about Time in Tribal Aboriginal Communities,* Mathematics in Aboriginal Schools Project, Northern Territory Dept. of Education, Darwin, Australia., 1984.

Harrow, L. y Wilson, P. L., *Science and Technology in Islam,* Crescent Moon Press, Londres, 1976.

Hart, K. M., *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* John Murray, Londres, 1981.

Harvey, R. D., Kerslake, D., Shuard, H. y Torbe, M., *Language Teaching and Learning No. 6 Mathematics,* Ward Lock Educational, Londres, 1982.

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics,* vols. I y II, Oxford University Press, 1921.

Herbert, M., *External Review of CSMP Materials,* Evaluation Report Series, nº 1-A-2, CEMREL, San Luis, 1974.

Herskovits, M. J., *Acculturation – the Study of Culture Contact,* Augustin, Nueva York, 1938.

Hewton, E., «Nuffield Mathematics (5-13): A Profile», *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, nº 6, págs. 407-430, 1975.

Hirst, K. E., «Undergraduate Investigations in Mathematics», *Educational Studies in Mathematics*, nº 12, págs. 373-387, 1981.

Holt, M., *Mathematics in Art,* Studio Vista, Londres, 1971.

Hopkins, B. y Wober, M., «Games and Sports: Missing Items in Cross-cultural Psychology», *International Journal of Psychology,* nº 8, págs. 5-14, 1973.

Horton, R., «African Traditional Thought and Western Science», *Africa*, nº XXXVII, págs. 50-71 y 155-187, 1967, también en M. F. D. Young (comp.), *Knowledge and Control*, 1971, Collier-Macmillan, Londres.

Howson, A. G. (comp.), *Challenges and Responses in Mathematics: 25 years of S. M. P.*, Cambridge University Press, 1987.

Howson, A. G., Keitel, C. y Kilpatrick, J., *Curriculum Development in Mathematics*, Cambridge University Press, 1981.

Howson, A. G. y Wilson, B., *School Mathematics in the 1990s*, ICME Study Series, Cambridge University Press, 1986.

Hoyles, C., «The Pupils' View of Mathematics Learning», *Educational Studies in Mathematics*, nº 13, págs. 349-372, 1982.

Hoyles, C., «What is the Point of Group Discussion in Mathematics», *Educational Studies in Mathematics*, nº 16, págs. 205-214, 1985.

Hoyles, C. y Sutherland, R., «Children Learning Mathematics – Insights from Within a LOGO Environment», en L. Streefland (comp.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Noordwijkerhout, Holanda, 1985.

Hudson. B., «Global and Multicultural Issues», *Mathematics Teaching*, nº 119, págs. 52-55, 1987.

Huizinga, J., *Homo Ludens*, Routledge and Kegan Paul, Londres, 1949 (trad. cast.: *Homo ludens*, Madrid, Alianza, 1998).

IOWO Team, «Eleven Minutes Group Work – A Transcript», *Educational Studies in Mathematics*, nº 8, págs. 377-389, 1977.

Isaacson, Z., *Teaching GCSE Mathematics*, Hodder and Stoughton, Londres, 1987.

Jayne, C. F., *String Figures and How To Make Them*, Dover, Nueva York, 1962.

Jones, J., *Cognitive Studies with Students in Papua New Guinea*, documento de trabajo nº 10, University of Papua New Guinea, Education Research Unit, 1974.

Joseph, G. G., «Foundations of Eurocentrism in Mathematics», *Race and Class*, vol. XXVIII, nº 3, págs. 13-28, 1987.

Kaner, P., «Mathematics for the Majority Project», en *Evaluation in Curriculum Development: Twelve Case Studies*, Schools Council, Londres, 1973.

Keddie, N., «Classroom Knowledge», en M. F. D. Young (comp.), *Knowledge and Control*, Collier-Macmillan, Londres, 1971.

Keller, A., «Mathematical Technologies and the Growth of the Idea of Technical Progress in the Sixteenth Century», en A. G. Debus (comp.), *Science, Medicine and Society in the Renaissance*, Heinemann, Londres, 1972.

Kelly, G. A., *The Psychology of Personal Constructs*, vols. 1 y 2, Norton, Nueva York, 1955.

Kent, D. y Hedger, K., «Growing Tall», *Educational Studies in Mathematics*, nº 11, págs. 137-179, 1980.

Khader, B., «Islam, Technology and Development», *Muslim Educational Quarterly*, nº 2, págs. 31-40, 1984.

Kline, M., *Mathematics: a Cultural Approach*, Addison Wesley, 1962.

Kline, M., *Mathematics in Western Culture*, Pelican, Londres, 1972 (trad. cast.: *Matemáticas en el mundo moderno*, Madrid, Hermann Blume, 1974).

Kline, M., *Mathematics, the Loss of Certainty*, Oxford University Press, 1980 (trad. cast.: *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI de España, 1985).

Kothari, D. S., conferencia de apertura, *Proceedings of Asian Regional Seminar of the Commonwealth Association of Science and Mathematics Educators* (Nueva Delhi), British Council, Londres, 1978.

Kozminsky, I., *Numbers, their Meaning and Magic*, Rider, Londres, 1985.

Kroeber, A. L. y Kluckhohn, D., *Culture – a Critical Review of Concepts and Definitions*, Vintage Books, Nueva York, 1952.

Krutetskii, V. A., *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, University of Chicago Press, 1976.

Lancy, D. F., «The Indigenous Mathematics Project», Ejemplar especial de *Papua New Guinea Journal of Education*, nº 14, 1978.

Lancy, D. F., *Cross-cultural Studies in Cognition and Mathematics*, Academic Press, Nueva York, 1983.

Lancy, D. F. y Tindall, B. A., *The Study of Play: Problems and Prospects*, actas del First Annual Meeting of the Association for the Anthropological Study of Play, 1977.

Larsson, I., *Individualized Mathematics Teaching*, Gleerup, Lund, 1973.

Laszlo, E., *The Systems View of the World*, Blackwell, Oxford, 1957.

Layton, D., «Curriculum Theory», en G. T. Wain (comp.), *Mathematical Education*, Van Nostrand, Londres, 1978.

Leach, E., «Some Anthropological Observations on Number, Time and Common-sense», en A. G. Howson (comp.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, 1973.

Lean, G. A., *Counting Systems of Papua New Guinea*, bibliografía de Investigación, 3ª ed., Department of Mathematics, Papua New Guinea University of Technology, Lae, Papúa-Nueva Guinea, 1986.

Lewis, D., *We the Navigators*, University Press of Hawaii, 1972.

Lewis, D., «Observations on Route-finding and Spatial Orientation Among the Aboriginal Peoples of the Western Desert Region of Central Australia», *Oceania*, nº XLVI, págs. 249-282, 1976.

Lighthill, J., *Newer Uses of Mathematics*, Penguin, Londres, 1978.

Lindvall, C. M. y Cox, R. C., *Evaluation as a Tool in Curriculum Development*, AERA Monograph Series on Curriculum Evaluation, nº 5, Rand McNally, Chicago, 1970.

Ling, J., *Mathematics Across the Curriculum*, Blackie, Londres, 1977.

Littlejohn, J., «Temne Space», *Anthropological Quarterly*, nº 36, págs. 1-17, 1963.

López-Real, F., *Small-group Work: Teachers' Theory and Practice*, tesis doctoral inédita, University of Cambridge, Department of Education, 1985.

Lundgren, U. P., *Frame Factors and the Teaching Process. A Contribution to Curriculum Theory and Theory on Teaching.* Almqvist and Wiksell, Estocolmo, 1972.

Lynch, J. y Plunkett, H. D., *Teacher Education and Cultural Change,* George Allen and Unwin, 1973.

MacLane, S., «Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics», *American Mathematical Monthly*, nº 88, págs. 462-472, 1981.

Marks, J., *Science and the Making of the Modern World,* págs. 238-239, Heinemann, Londres, 1983.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K., *Thinking Mathematically,* Addison-Wesley, Londres, 1982.

McLone, R. R., «Teaching Mathematical Modelling», *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, nº 15, págs. 244-246, 1979.

McQualter, J. W., «Becoming a Mathematics Teacher: The Use of Personal Construct Theory», *Educational Studies in Mathematics*, nº 17, págs. 1-14, 1986.

Mellin-Olsen, S., *The Politics of Mathematics Education,* Reidel, Dordrecht, 1987.

Menninger, K., *Number Words and Number Symbols – A Cultural History of Numbers,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1969.

Merrill, M. D. y Wood, N. D., *Instructional Strategies: A Preliminary Taxonomy,* ERIC, Columbus, Ohio, 1974.

Michell, J., *A Little History of Astro-archaeology,* Thames and Hudson, Londres, 1977.

Moore, C. G., *The Implications of String Figures for Native American Mathematics Education,* manuscrito inédito, 1986.

Morton, L., «War, Science and Social Change», en K. H. Silvert (comp.), *Social Reality of Scientific Myth: Science and social change,* American Universities, Nueva York, 1969.

Mottershead, L., *Sources of Mathematical Discovery,* Blackwell, Oxford, 1978.

Mottershead, L., *Investigations in Mathematics,* Blackwell, Oxford, 1985.

Murdoch, G. P., «The Common Denominator of Cultures», en R. Linton (comp.), *The Science of Man in the World Crisis,* Columbia, Nueva York, 1945.

Musgrove, F., *Education and Anthropology, Other Cultures and the Teacher,* John Wiley, Londres, 1982.

Nasr, S. H., *Islamic Science – An Illustrated Study,* World of Islam Festival Publishing Company, Scorpion, Essex, Reino Unido, 1976.

Newman, M. H. A., «What is Mathematics? New Answers to an Old Question», *Mathematical Gazette*, nº 43, pág. 345, 1959.

Norbeck, E., «The Study of Play – Johan Huizinga and Modern Anthropology», en D. F. Lancy y B. A. Tindall, *The Study of Play: Problems and Prospects,* actas del First Annual Meeting of the Association for the Anthropological Study of Play, 1977.

Ormell, C. P., *Mathematics Applicable – A Schools Council Mathematics Project,* Heinemann Educational, Londres, 1975-1978.

Ormell, C. P, *The Applicability of Mathematics,* Maths Applicable Group, University of East Anglia, Keswick Hall, Norwich., 1982.

Osen, L. M., *Women in Mathematics,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1974.

Oswalt, W. H., *An Anthropological Analysis of Food-getting Technology,* Wiley, Nueva York, 1976.

Otte, M., «New Trends in Mathematics Teaching, The Education of Professional Life of Mathematical Teachers», UNESCO, *New Trends in Mathematics Teaching*, vol. 4, cap. 6, págs. 107-138, 1979.

Pennick, N., *The Ancient Science of Geomancy,* Thames and Hudson, Londres, 1979.

Perl, T., *Maths Equals: Biographies of Women Mathematicians and Related Activities,* Addison-Wesley, Nueva York, 1978.

Philp, H., «Mathematical Education in Developing Countries – Some Problems of Teaching and Learning», en A. G. Howson (comp.), *Developments in Mathematical Education,* actas de la 2ª ICME, Cambridge University Press, 1973.

Pimm, D., *Speaking Mathematically,* Routledge and Kegan Paul, Londres, 1987.

Pinxten, R., van Dooren, I. y Harvey, F., *The Anthropology of Space,* University of Pennsylvania Press, 1983.

Plummer, G., «Responses to Snowflakes», *Mathematics Teaching,* nº 116, págs. 30-32, 1986.

Purce, J., *The Mystic Spiral,* Thames and Hudson, Londres, 1974.

Rahman, A. U., «Scientific Education in Muslim Countries – Principles and Guidelines», en I. R. Al-Faruqi y A. D. Nasseef (comps.), *Social and Natural Sciences: the Islamic Perspective,* Hodder and Stoughton, Londres, 1981.

Raisz, E., *General Cartography,* McGraw-Hill, Nueva York, 1938 (trad. cast.: *Cartografía*, Barcelona, Omega, 1985).

Resnikoff, H. L. y Wells, R. O., *Mathematics in Civilization,* Dover, Nueva York, 1984.

Ronan, C. A., *The Shorter Science and Civilisation in China: vol. 1,* Cambridge University Press, 1978.

Ronan, C. A., *The Shorter Science and Civilisation in China: vol. 2*, Cambridge University Press, 1981.

Ronan, C. A., *The Cambridge Illustrated History of the World's Science,* Cambridge University Press, 1983.

Ronan, C. A., *The Shorter Science and Civilisation in China: Vol. 3,* Cambridge University Press, 1986.

Roth, W. E., «Games, Sports and Amusements», *North Queensland Ethnographic Bulletin,* nº 4, págs. 7-24, 1902.

Rowland, K., *The Development of Shape,* Ginn, Londres, 1963.

Ruthven, K., *Mathematics and General Education,* tesis doctoral inédita, University of Stirling, 1980.

Sagasti, F. R., «The Two Civilizations and the Process of Development», *Prospects*, nº X, págs. 123-139, 1980.

Savory, E. M. (comp.), *Introduction to Islamic Civilisation,* Cambridge University Press, 1976.
Schaaf, W. L., *Our Mathematical Heritage,* Collier, Nueva York, 1963.
Schminke, C. W. y Arnold, W. R., *Mathematics is a Verb,* Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 1971.
Science 5-13 Project (Schools Council), *Time,* McDonald Educational, Londres, 1972.
Secondary Science Improvement Study, *Relative Position and Motion* (nivel 4), Rand McNally, Chicago, 1978.
Sewell, B., *Use of Mathematics by Adults in Daily Life,* Advisory Council for Adult and Continuing Education, 19b de Montford St, Leicester LE1 7GE, 1981.
Shann, M. H. y otros, *Student Effects of an Interdisciplinary Curriculum for Real Problem Solving: The 197-75 USMES Evaluation, Final Report,* Boston University, Boston, Mass, 1975.
Shuard, H. B. y Quadling, D., *Teachers of Mathematics: Some Aspects of Professional Life,* Harper and Row, Londres, 1980.
Silvert, K. H. (comp.), *Social Reality of Scientific Myth: Science and Social Change,* American Universities, Nueva York, 1969.
Skovsmose, O.,«Mathematical Education versus Critical Education», *Educational Studies in Mathematics*, nº 16, págs. 337-354, 1985.
Slavin, R. y otros, *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn,* Plenum Press, Nueva York, 1985.
Steffe, L. P., «Children's Algorithms as Schemes», *Educational Studies in Mathematics,* nº 14, págs. 109-125, 1983.
Stenhouse, L., *Culture and Education,* Weybright and Talley, Nueva York, 1967 (trad. cast.: *Cultura y educación*, Morón, Publicaciones del Movimiento Cooperativo Escuela Popular, 1997).
Stokes, J., *A Description of the Concepts of Groote Eylandt Aborigines* (manus.), Angurugu, Northern Territory.
Stone, M. H., «Reform in School Mathematics», en *New Thinking in School Mathematics,* O. E. E. C., París, 1961.
Strevens, P, *Technical, Technological and Scientific English,* ponencia presentada en la Conference of the International Association of Teachers of English as a Foreign Language, Londres., 1972.
Struik, D. J., «On the Sociology of Mathematics», en W. L. Schaaf, *Our Mathematical Heritage,* Collier, Nueva York, 1963.
Swetz, F. J. (comp.), *Socialist Mathematics Education,* Burgundy Press, Southampton, P.A, 1978.
Swetz, F. J., *Mathematics Education in China,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1974.
Swetz, F. J., «The Use of Projects in Teaching the History of Mathematics», *Historia Mathematica*, nº 4, págs. 201-205, 1982.
Sydenham, P. H., *Measuring Instruments: Tools of Knowledge and Control,* Peregrinus, Londres, 1979.

Taft, R., «Coping with Unfamiliar Cultures», en N. Warren (comp.), *Studies in Cross-Cultural Psychology*, vol. 1, Academic Press, Londres, 1977.
Thwaites, B., *SMP: The First Ten Years,* Cambridge University Press, 1972.
Treffers, A., *Three Dimensions – A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project,* Reidel, Dordrecht, 1987.
Tylor, E. B., *Primitive Culture,* J. Murray, Londres, 1871 (trad. cast.: *Cultura primitiva*, Madrid, Ayuso, 1977).
Unified Sciences and Mathematics for Elementary Schools Project, *Mathematics and the Natural, Social and Communications Sciences in Real Problem Solving,* Education Development Center, Massachusetts, 1976.
Van Sertima, I., *Blacks in Science,* Transaction Books, Nueva Brunswick, USA, 1986.
Vansina, J., *Oral Tradition as History,* Curry, Londres, 1985 (trad. cast.: *Tradición oral*, Cerdanyola, Labor, 1968).
Vygotsky, L. S., *Mind in Society,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1978.
Waddington, C. H., *Tools for Thought,* Paladin, St Albans, 1977.
Walford, R., *Games in Geography*, Longmans, Londres, 1969.
Washburn, S. L., «Tools and Human Evolution», en G. F. Rochlin, *Scientific Technology and Social Change,* Freeman, San Francisco, 1960.
Weizenbaum, J., *Computer Power and Human Reason – From Judgement to Calculation,* Penguin, Londres, 1984 (trad. cast.: *La frontera entre el ordenador y la mente*, Madrid, Pirámide, 1977).
White, L. A., «The Locus of Mathematical Reality», *Philosophy of Science*, nº 14, págs. 289-303, 1947.
White, L. A., *The Evolution of Culture,* McGraw-Hill, Nueva York, 1959 (trad. cast.: *La ciencia de la cultura*, Barcelona, Paidós, 1982).
Whorf, B. L., *Language, Thought and Reality,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1967 (trad. cast.: *Lenguaje, pensamiento y realidad*, Barcelona, Barral, 1971).
Wilder, R. L., *Evolution of Mathematical Concepts,* Open University Press, 1978, publicado originalmente por J. Wiley, 1968.
Wilder, R. L., «Mathematics – A Cultural Phenomenon», en G. E. Dole y R. L. Carneiro (comps.), *Essays in the Science of Culture,* T. Y. Gowell, Nueva York, 1960.
Wilder, R. L., *Mathematics as a Cultural System,* Pergamon Press, Oxford, 1981.
Williams, J., «Practical Applied Mathematics», *Mathematics Teaching,* nº 116, págs. 56-60, 1986.
Williams, T. R., *Introduction to Socialization,* C. V. Mosby Company, San Luis, 1972.
Wilson, B., *Cultural Contexts of Science and Mathematics Education – A Bibliographic Guide,* Centre for Studies in Science Education, University of Leeds, 1981.
Wittmann, E., «Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education», *Educational Studies in Mathematics*, nº 15, págs. 25-36, 1984.

Wooton, W., *SMSG: The Making of a Curriculum,* Yale University Press, Nueva Haven, Connecticut, 1965.

Wuthnow, R. y otros, *Cultural Analysis,* Routledge and Kegan Paul, Boston, Massachusetts, 1984.

Yates, J., *Four Mathematical Classrooms. An Enquiry into Teaching Method,* University of Southampton, 1978.

Zaslavsky, C., *Africa Counts,* Prindle, Weber y Schmidt, Boston, Mass., 1973.

ÍNDICE DE NOMBRES